近畿大A日程2022

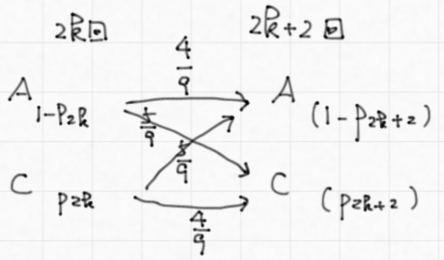
1

時計まわりを ↘ 反時計まわりを ↙ と表す.

(1) $\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}\times {}_2C_1 = \frac{4}{9}$

(2) $\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}\times {}_3C_2 + \frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6} = \frac{13}{27}$

(3) 奇数回では B または D にしか移動できないので n が奇数のとき $p_n = 0$



左図より

$$p_{2k+2} = \frac{5}{9}(1-p_{2k}) + \frac{4}{9}p_{2k} = -\frac{1}{9}p_{2k} + \frac{5}{9}$$

$$p_{2k+2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{9}\left(p_{2k} - \frac{1}{2}\right)$$

$$p_{2k} - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}\left(p_2 - \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{9} - \frac{1}{2}\right)$$

$$p_{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}$$

(4) $n = 2k$ のときは A または C にしか移動できない.

$n = 2k-1$ のとき D にいる確率を q_{2k-1} とすると

$$q_{2k+1} = \frac{4}{6}p_{2k} + \frac{2}{6}(1-p_{2k}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{54}\left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}$$

$$\left|q_{2k+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{54}\left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{k}$$

$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{9}\right)^{k} < \frac{1}{10^{10}}$ を解くと

$$-\log_{10}6 - 2k\log_{10}3 < -10$$

$$(2k+1)\log_{10}3 > 10 - \log_{10}2$$

$$2k+1 > \frac{10 - 0.3010}{0.4771} = 20.3\cdots$$

$k = 10$. $n = 21$ が条件を満たす最小の n

2

(1) $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{4^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = 4\sqrt{1+\frac{1}{9}} = \mathbf{\frac{4\sqrt{10}}{3}}$

$\triangle OAB = \frac{40}{3} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin 45^\circ$ より $|\overrightarrow{OB}| = \frac{\cancel{40}^{\sqrt{10}}}{\cancel{3}} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4\sqrt{10}}} = \mathbf{4\sqrt{5}}$

$\cos 45^\circ = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} = \frac{4m - \frac{4}{3}n}{\frac{4\sqrt{10}}{3} \times 4\sqrt{5}} = \frac{12m - 4n}{80\sqrt{2}} = \frac{3m-n}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad 3m - n = 20 \ldots ①$

$\triangle OAB = \frac{1}{2}\left|4n + \frac{4}{3}m\right| = \frac{40}{3}$ $\quad |12n + 4m| = 80 \quad 3n + m = \pm 20 \ldots ②$

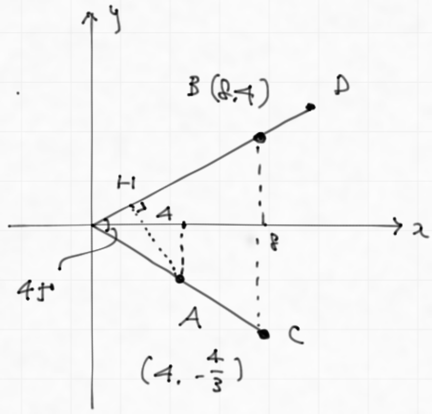
①, ② を連立　**$n=4,\ m=8$**　(∵ m, n は正の実数)

(2) $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \cdots ③$,　$2s + 3t = 4 \cdots ④$

④より　$\frac{1}{2}s + \frac{3}{4}t = 1$

③より　$\overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{2}s\right)2\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}t\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{OB}\right)$

$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OB}$ とすれば P は直線 CD 上の点.



$\overrightarrow{OC} = \left(8, -\frac{8}{3}\right)$, $\overrightarrow{OD} = \left(\frac{32}{3}, \frac{16}{3}\right)$ だから

$$y = \frac{\frac{16}{3} + \frac{8}{3}}{\frac{32}{3} - 8}(x - 8) - \frac{8}{3} = 3x - \frac{80}{3}$$

$|\overrightarrow{OH}| = |\overrightarrow{OA}|\cos 45^\circ = \frac{4\sqrt{5}}{3}$

$\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} \times \frac{4\sqrt{5}}{3} = \frac{\cancel{4\sqrt{5}}}{3} \times \frac{1}{\cancel{4\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ $\quad$ **H$\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$**

$|\overrightarrow{OH}| : |\overrightarrow{OD}| = \frac{4}{3}\sqrt{5} : |\overrightarrow{OB}| \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{5} : \frac{4}{3} \times 4\sqrt{5} = 1 : 4$

$|\overrightarrow{OA}| : |\overrightarrow{OC}| = 1 : 2$

よって　$\frac{S}{T} = \frac{1 \times 1}{2 \times 4} = \mathbf{\frac{1}{8}}$

3 (1) l は $y=ax+b$ と表せ $(2,1)$ はこの上にあるので $1=2a+b$　$b=$ **$-2a+1$**

(2) $C: y=\frac{1}{2}x^2-2x$.　$l: y=1$ となるので.

$\frac{1}{2}x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x^2-4x-2=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{6}$　$x=$ **$2-\sqrt{6}$, $2+\sqrt{6}$**

(3) $C: y=\frac{1}{2}x^2-x$.　$l: y=ax-2a+1$

交点は $\frac{1}{2}x^2-x-ax+2a-1=0 \Leftrightarrow x^2-2(1+a)x+4a-2=0$ より

$x=1+a\pm\sqrt{a^2-2a+3}$

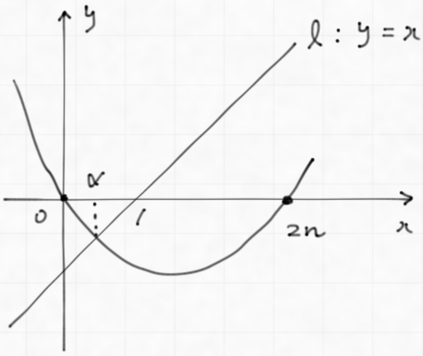
よって $S=\frac{\frac{1}{2}}{6}\left(1+a+\sqrt{a^2-2a+3}-1-a+\sqrt{a^2-2a+3}\right)^2=\frac{2}{3}(a^2-2a+3)^{\frac{3}{2}}$

ここで $a^2-2a+3=(a-1)^2+2$ だから. $a=1$ で S は最小値 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ をとる

$a=$ **1**, $b=-2\cdot1+1=$ **-1**, $S=$ **$\frac{4\sqrt{2}}{3}$**

(4) $l: y=x-1$　$C: y=\frac{1}{2}x^2-nx$ との交点は

$x^2-2nx-2x+2=0$ より $x=n+1\pm\sqrt{(n+1)^2-8}=n+1\pm\sqrt{n^2+2n-7}$



左図より $0<\alpha<1$ だから α より大きい整数で最小のものは **1**

$f(x)=x^2-2nx-2x+2$ とすると

$f(2n)=4n^2-4n^2-4n+2=2-4n<0$

$f(2n+1)=\cancel{4n^2}+\cancel{4n}+1-\cancel{4n^2}-2n-\cancel{4n}-2+2=-2n+1<0$

$f(2n+2)=\cancel{4n^2}+\cancel{8n}+\cancel{4}-\cancel{4n^2}-\cancel{4n}-\cancel{4n}-\cancel{4}+2=2>0$

より. $2n+1<\beta<2n+2$

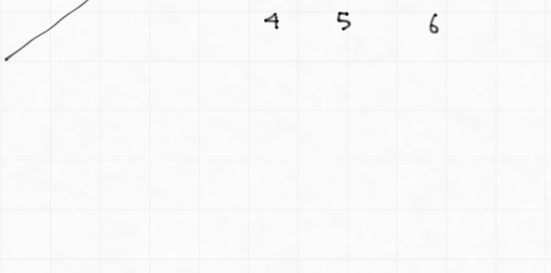
β よりも小さい整数で最大のものは $x=$ **$2n+1$**

$n=1$ のとき

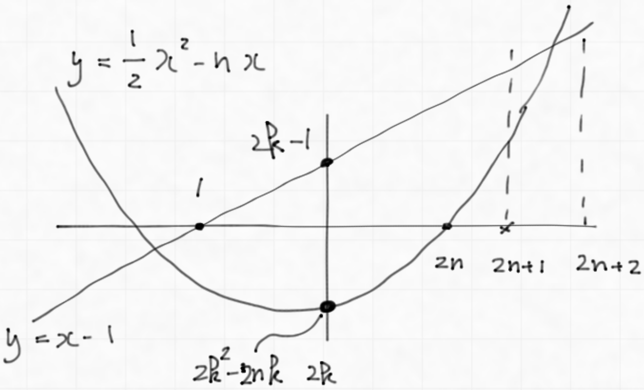
$x=1, 2, 3$ のときを考えればよい

$L=4$

$n=2$ のとき



$L=16$



$x = 2k$ のとき. $(2k-1) - (2k^2 - 2nk) + 1 = -2k^2 + 2(n+1)k$

$x = 2k-1$ のとき $(2k-1-1) - \left\{\frac{1}{2}(2k-1)^2 - n(2k-1) + \frac{1}{2}\right\} + 1$

$$= -2k^2 + 4k + 2nk - n - 2$$

$$L = \sum_{k=1}^{n}\left(-2k^2 + 2(n+1)k - 2k^2 + 4k + 2nk - n - 2\right) - 2(n+1)^2 + 4(n+1) + 2n(n+1) - n - 2$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(-4k^2 + (4n+6)k - (n+2)\right) - 2(n+1)^2 + 4(n+1) + 2n(n+1) - n - 2$$

$$= -\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) + (2n+3)n(n+1) - (n+2)n - 2(n+1)^2 + 4(n+1) + 2n(n+1) - n - 2$$

$$= -\frac{4}{3}n^3 - \cancel{2n^2} - \frac{2}{3}n + 2n^3 + \cancel{5n^2} + 3n - \cancel{n^2} - \cancel{2n} - 2n^2 - \cancel{4n} - 2 + \cancel{4n} + 4 + 2n^2 + \cancel{2n} - n - 2$$

$$= \frac{2}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{4}{3}n$$