兵庫医科大学2021

1 (1) はずれくじをn本として 2本とも当たりは

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{n+5}C_2} = \frac{5}{39} \Leftrightarrow \frac{\cancel{20}^{4}}{(n+5)(n+4)} = \frac{8}{39} \Leftrightarrow (n+5)(n+4) = 156 = 12\times 13$$

$\therefore n = \mathbf{8}$

(2) 円の中心と $x=3$ との距離は $3-(-1)=4$ だから $r=4$

したがって球の式は $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4^2$ と表される。

これと $y=4$ を連立。 $(x+1)^2+(4-2)^2+(z-3)^2=4^2$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(z-3)^2 = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$\therefore$ 中心は $\mathbf{(-1,4,3)}$，半径 $\mathbf{2\sqrt{3}}$ の円

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^5}{(x^3-1)^2}dx$ $x^3-1=t$ とする $\dfrac{dt}{dx}=3x^2$， $\begin{array}{c|c} x & -1 \to 0 \\ \hline t & -2 \to -1 \end{array}$

$$与式 = \int_{-2}^{-1}\frac{x^5}{t^2}\frac{1}{3x^2}dt = \int_{-2}^{-1}\frac{t+1}{t^2}\times\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int_{-2}^{-1}\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}dt$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\log|t| - t^{-1}\Big]_{-2}^{-1} = \frac{1}{3}(\log 1 + 1) - \frac{1}{3}\left(\log 2 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}\log 2 + \frac{1}{6}$$

(4) $8357 \div 7747 = 1 \cdots 610$　　$7747 \div 61 = 127$， $8357 \div 61 = 137$

$7747 \div 610 = 12 \cdots 427$

$610 \div 427 = 1 \cdots 183$　　$\therefore \dfrac{127}{137}$

$427 \div 183 = 2 \cdots 61$

$183 \div 61 = 3$

(5) $y = \sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x - 2 = \sqrt{3}\sin 2x + 2\dfrac{1-\cos 2x}{2} - 2 = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - 1$

$= 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$

$0 \leqq x < \pi$ のとき， $-\frac{\pi}{6} \leqq 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$ で， $-1 \leqq \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1$ （$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ すなわち $x=\frac{1}{3}\pi$ のとき） y は最大値 $2\times1-1=1$ をとる。

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$ （$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi$ すなわち，$x=\frac{5}{6}\pi$ のとき） y は最小値 $2\times(-1)-1=-3$ をとる

y の最大値は $x=\mathbf{\frac{1}{3}\pi}$ のときで $y=\mathbf{1}$． 最小値は $x=\mathbf{\frac{5}{6}\pi}$ のときで 最小値は $\mathbf{-3}$

兵庫医科大学2021

(1) $m\times(1+r)-x = \mathbf{(1+r)m-x}$

(2) $a_{k-1}(1+r)-x=a_k$　　$\mathbf{a_k=(1+r)a_{k-1}-x}$

(3) $a_k-\frac{x}{r}=(1+r)\left(a_{k-1}-\frac{x}{r}\right)$ と変形できる。

これは $\left\{a_k-\frac{x}{r}\right\}$ が初項 $a_1-\frac{x}{r}$，公比 $(1+r)$ の等比数列であることを示している.

a_1 は (1) より $(1+r)m-x$ だから

$$a_n-\frac{x}{r}=\left\{(1+r)m-x-\frac{x}{r}\right\}(1+r)^{n-1}$$

$$a_n=\left(m+rm-x-\frac{x}{r}\right)(1+r)^{n-1}+\frac{x}{r}=\left(m-\frac{x}{r}\right)(1+r)^{n}+\frac{x}{r}$$

$n=y$ のとき，残高が 0 となればよい

$$a_y=\left(m-\frac{x}{r}\right)(1+r)^{y}+\frac{x}{r}=0$$

$x=rm$ のとき，上式は成立しないので．

$$(1+r)^y=\frac{x}{\cancel{r}}\times\frac{\cancel{r}}{x-rm}=\frac{x}{x-rm}$$

$x\leq rm$ のとき，上式は成立しないので $x>rm$

両辺の自然対数をとる

$$y\log(1+r)=\log\frac{x}{x-rm}$$

$\therefore\ \mathbf{y=\frac{1}{\log(1+r)}\log\frac{x}{x-rm}}$

$\mathbf{(rm<x)}$

(4) $f(x)=\frac{1}{\log(1+r)}\{\log x-\log(x-rm)\}$

$$f'(x)=\frac{1}{\log(1+r)}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-rm}\right)=\frac{1}{\log(1+r)}\times\frac{-rm}{x(x-rm)}$$

$$f''(x)=\frac{1}{\log(1+r)}\left(-x^{-2}+(x-rm)^{-2}\right)=\frac{1}{\log(1+r)}\times\frac{x^2-(x-rm)^2}{x^2(x-rm)^2}=\frac{rm(2x-rm)}{\log(1+r)\,x^2(x-rm)^2}$$

$rm<x$ のときを考える

$f'(x)$ は $x>rm$ のとき，$f'(x)$ は常に負

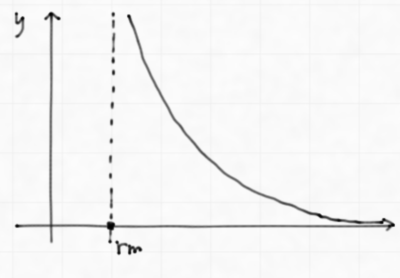
$f''(x)$ は $x>rm$ のとき $f''(x)$ は常に正

増減および凹凸は右のようになる.

($rm<x<m$ において $f(x)$ は単調に減少し，
下に凸な関数である)

x	rm	$\cdots$	m
$f'(x)$	/	$-$	
$f''(x)$	/	$+$	
$f(x)$	/	↘	

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{\log(1+r)}\times\log 1=0 \qquad \lim_{x\to rm+0}f(x)=\lim_{x\to rm+0}\frac{1}{\log(1+r)}\times\log\frac{x}{x-rm}=\infty$$



兵庫医科大学2021

(5) $y=\dfrac{1}{\log(1+r)}\log\dfrac{x}{x-rm}$ に数値を代入

$$y=\frac{1}{\log\left(1+\frac{15}{12}\times\frac{1}{100}\right)}\log\frac{15}{15-1000\times\frac{15}{12}\times\frac{1}{100}}$$

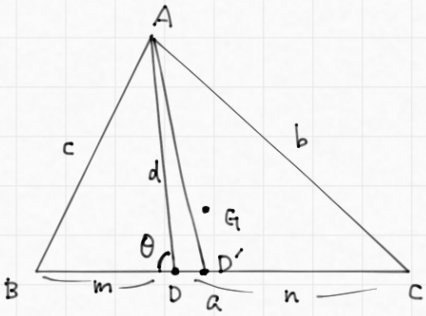
$$=\frac{1}{\log\frac{81}{80}}\log\frac{15}{\frac{20}{8}}=\frac{\log 2+\log 3}{\log 81-\log 80}=\frac{\frac{\log_{10}2}{\cancel{\log_{10}e}}+\frac{\log_{10}3}{\cancel{\log_{10}e}}}{\frac{\log_{10}81}{\cancel{\log_{10}e}}-\frac{\log_{10}80}{\cancel{\log_{10}e}}}$$

$$=\frac{\log_{10}2+\log_{10}3}{4\log_{10}3-1-3\log_{10}2}=\frac{0.3010+0.4771}{4\times0.4771-1-3\times0.3010}=\frac{0.7781}{0.0054}=144.09\cdots$$

145ヶ月　　すなわち **12年と1ヶ月** かかる.

兵庫医科大学2021

3



(1) 余弦定理より $\cos\theta = \dfrac{d^2+m^2-c^2}{2dm}$

(2) $\cos\angle ADC = \dfrac{d^2+n^2-b^2}{2dn}$

$\angle ADC = 180^\circ - \theta$ だから. $\cos\angle ADC = \cos(180^\circ-\theta) = -\cos\theta$

(1)と併せて

$$\frac{d^2+n^2-b^2}{\cancel{2}dn} = -\frac{d^2+m^2-c^2}{\cancel{2}dm}$$

$$md^2+mn^2-mb^2 = -nd^2-nm^2+nc^2$$

$$b^2m+c^2n = md^2+mn^2+nd^2+nm^2$$
$$= d^2(m+n)+mn(m+n)$$
$$= ad^2+amn = a(d^2+mn)$$

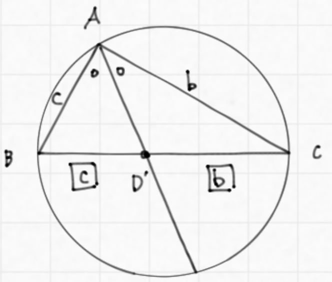
以上より $b^2m+c^2n = a(d^2+mn)$ が成り立つことが示された.

(3) $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|$ の両辺を2乗して $|\overrightarrow{BC}|^2 = a^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AB}|^2 = b^2+c^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ より $|\overrightarrow{AG}|^2 = \dfrac{1}{9}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2 = \dfrac{1}{9}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2\right) = \dfrac{1}{9}\left(c^2+b^2+b^2+c^2-a^2\right)$

$\therefore\ |\overrightarrow{AG}| = \dfrac{1}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$



(4) $\angle BAD' = \angle CAD'$ だから $AB:AC = BD':CD' = c:b$

$\overrightarrow{AD'} = \dfrac{1}{c+b}(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC})$

$|\overrightarrow{AD'}|^2 = \dfrac{1}{(c+b)^2}\left(b^2c^2+c^2b^2+2bc\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$

ここで $\angle BAC = 90^\circ$ のとき. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ だから $|\overrightarrow{AD'}| = \dfrac{\sqrt{2}\,bc}{b+c}$

AD' の長さは $\dfrac{\sqrt{2}\,bc}{b+c}$

(5) $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = R$

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2 = R^2+R^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = R^2-\dfrac{1}{2}c^2$

同様に $|\overrightarrow{AC}| = b$, $|\overrightarrow{BC}| = a$ より $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = R^2-\dfrac{1}{2}b^2$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = R^2-\dfrac{1}{2}a^2$

$|\overrightarrow{OG}|^2 = \dfrac{1}{9}\left(R^2+R^2+R^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{1}{9}\left(3R^2+2(R^2-\dfrac{1}{2}c^2)+2(R^2-\dfrac{1}{2}a^2)+2(R^2-\dfrac{1}{2}b^2)\right)$

$= R^2-\dfrac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$ $\therefore\ OG = \sqrt{R^2-\dfrac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)}$