大阪医科薬科大学2021後

1 (1) $f(x)-g(x)=x^2-4ax+a-(-x^2-2ax-a)=2x^2-2ax+2a=h(x)$ とおく.

すべての実数xに対し $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つ条件は、全ての実数xに対し $h(x)\geqq 0$ が成り立つことと等しく、それは $h(x)=0$ が異なる実数解を持たないことに等しい.

$h(x)=0$ の判別式をDとすると

$$D/4=a^2-2\cdot 2a\leqq 0 \iff a(a-4)\leqq 0 \text{ より } \quad \mathbf{0\leqq a\leqq 4}$$

(2) $f(x_1)=x_1^2-4ax_1+a=(x_1-2a)^2-4a^2+a\geqq -4a^2+a$

$g(x_2)=-x_2^2-2ax_2-a=-(x_2-a)^2+a^2-a\leqq a^2-a$

すべての実数x_1, x_2に対し、$f(x_1)>g(x_2)$ が成り立つための条件は

$$-4a^2+a>a^2-a$$

が成り立つことで、それは $5a^2-2a<0 \iff a(5a-2)<0$ より $\mathbf{0<a<\frac{2}{5}}$

(3) $f(x_1)\leqq g(x_2)$ を満たすx_1, x_2が存在するための条件は、(2)より

$$-4a^2+a\leqq a^2-a \iff a\leqq 0,\ a\geqq \frac{2}{5}$$

また、$f(x)\geqq g(x)$ がすべての実数xについて成り立つ条件は(1)より $0\leqq a\leqq 4$

したがって題意の条件は、 $\mathbf{\frac{2}{5}\leqq a\leqq 4}$ **または** $\mathbf{a=0}$

大阪医科薬科大学2021後

2 (1) $(\sin x)' = \cos x$. だから点Aにおける $y=\sin x$ の接線 l_A は

$$y = \cos a\,(x-a) + \sin a$$

同様に l_B は $y = \cos b\,(x-b) + \sin b$

l_A と l_B の2つの式を連立して.

$$\cos a\,(x-a) + \sin a = \cos b\,(x-b) + \sin b$$

$$(\cos a - \cos b)x = a\cos a - b\cos b + \sin b - \sin a \quad \cdots ①$$

ここで $\cos a - \cos b \neq 0$ のとき. ①は $x = \dfrac{a\cos a - b\cos b + \sin b - \sin a}{\cos a - \cos b}$ となり x は唯1つ存在する.

$\cos a - \cos b = 0$ のとき. $a\cos a - b\cos b + \sin b - \sin a = 0$ のときは x は無数に存在し.

$a\cos a - b\cos b + \sin b - \sin a \neq 0$ のときは x は存在しない.

よって①が唯1つの解を持つための条件は $\cos a \neq \cos b$.

これを解くと $a = \pm b + 2n\pi$ (nは整数)

∴ l_A と l_B が1点で交わる条件は **$a \pm b \neq 2n\pi$ (nは整数で $a \neq b$)**

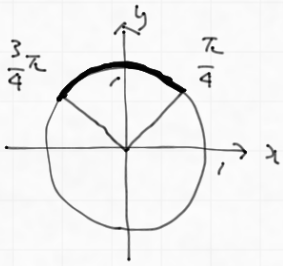
また、このとき交点のx座標は $x = \dfrac{a\cos a - b\cos b + \sin b - \sin a}{\cos a - \cos b}$

$$y = \cos b\left(\frac{a\cos a - b\cos b + \sin b - \sin a}{\cos a - \cos b} - b\right) + \sin b$$

$$= \frac{a\cos a\cos b - \cancel{b\cos^2 b} + \cancel{\cos b\sin b} - \cos b\sin a - b\cos a\cos b + \cancel{b\cos^2 b} + \cos a\sin b - \cancel{\cos b\sin b}}{\cos a - \cos b}$$

$$= \frac{(a-b)\cos a\cos b + \cos a\sin b - \cos b\sin a}{\cos a - \cos b}$$

$$\therefore\ P\left(\frac{a\cos a - b\cos b + \sin b - \sin a}{\cos a - \cos b},\ \frac{(a-b)\cos a\cos b + \cos a\sin b - \cos b\sin a}{\cos a - \cos b}\right)$$



(2) $$f(a) = \frac{-\frac{\pi}{2}\cos a\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) + \cos a\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\sin a}{\cos a - \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}\cos a\sin a + \cos^2 a + \sin^2 a}{\cos a + \sin a} = \frac{\pi\cos a\sin a + 2}{2(\cos a + \sin a)}$$

$\cos a + \sin a = t$ とおく. ($t = \sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$, $0 \leqq a \leqq \frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{4} \leqq a + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi$ だから $1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$)

$t^2 = 1 + 2\cos a\sin a$ より $\cos a\sin a = \dfrac{t^2-1}{2}$

$$f(a) = \frac{\pi \times \frac{t^2-1}{2} + 2}{2t} = \frac{\pi t^2 + 4 - \pi}{4t} = \frac{\pi}{4}t + \frac{4-\pi}{4t} = g(t) \text{ とおく}$$

$$g'(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{4-\pi}{4t^2} = \frac{\pi t^2 - (4-\pi)}{4t^2}$$

$g'(t) = 0$ となるのは $t = \pm\sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}}$ $\sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}} < 1$ なので

$1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ で $g'(t)$ は常に正. すなわち $g(t)$ は単調に増加する. ($t=1$ で最小. $t=\sqrt{2}$ で最大)

$f(a)$ の最大値は $g(\sqrt{2}) = \dfrac{\pi+4}{4\sqrt{2}}$ $\left(a = \dfrac{\pi}{4}\right)$ 最小値は $g(1) = 1$ $\left(a = 0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

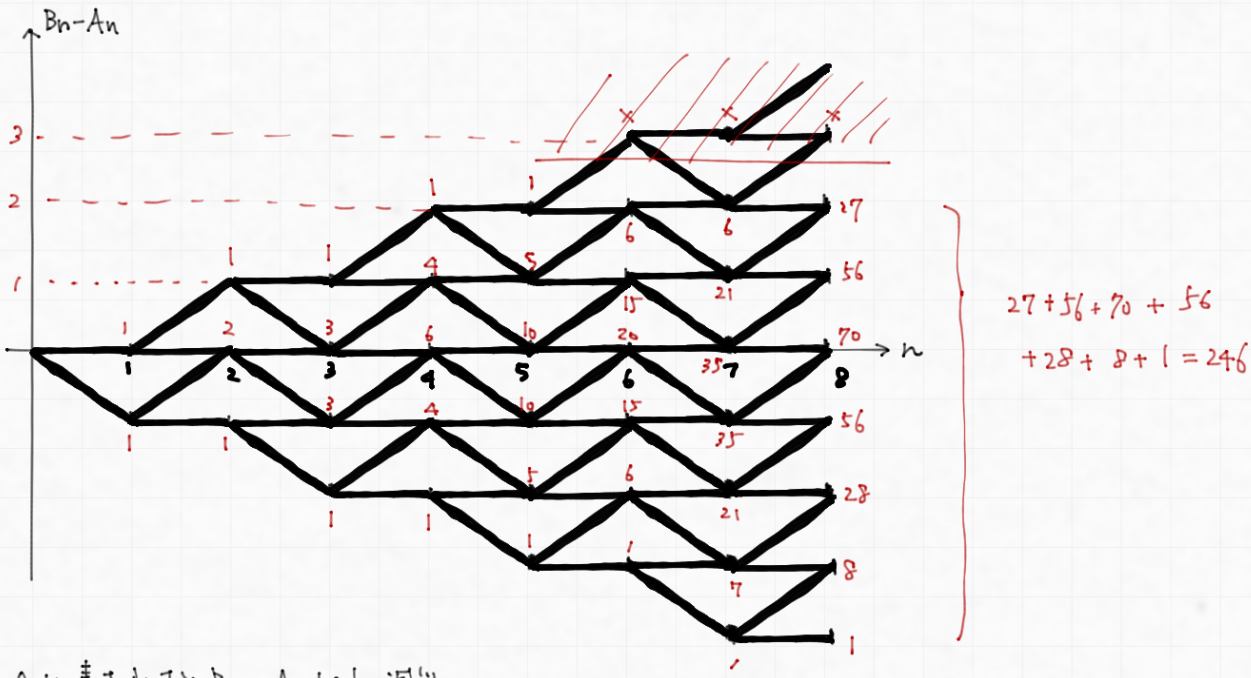
大阪医科薬科大学2021後

3 (1) 兄は 8回中の4回投げ、そのうち1回が表で他は裏.

弟は 〃 そのうち4回が表で裏は出ない.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 {}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

(2)



Aが表を出すとBn−Anは1つ減り

Bが 〃 〃 1つ増える.

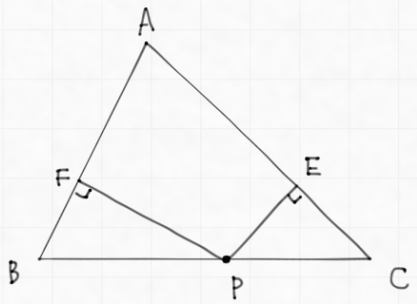
これを上のように経路に対応づける.

全ての経路は $2^8=256$ 通り そのうち Bn−Anが1度も3とならないのは246通り.

よって、もとめる確率は $1-\frac{\cancel{246}^{123}}{\cancel{256}_{128}} = \frac{5}{128}$

大阪医科薬科大学2021後

4



$BP = x$, $PC = a - x$ とおく.

また△ABCの外接円の半径をRとすると. 正弦定理より

$$2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \iff \sin B = \frac{b}{2R},\ \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$PF = BP\sin B = \frac{bx}{2R},\quad PE = PC\sin C = \frac{c(a-x)}{2R}$$

$$PE^2 + PF^2 = \frac{1}{4R^2}\left(c^2(a-x)^2 + b^2x^2\right)$$

$$= \frac{1}{4R^2}\left((b^2+c^2)x^2 - 2ac^2x + c^2a^2\right)$$

$$= \frac{1}{4R^2}(b^2+c^2)\left(x - \frac{ac^2}{b^2+c^2}\right)^2 - \frac{1}{4R^2}\times\frac{a^2c^2}{b^2+c^2} + c^2a^2$$

よって PE^2+PF^2 が最小となるのは $x = \dfrac{ac^2}{b^2+c^2}$ のときで

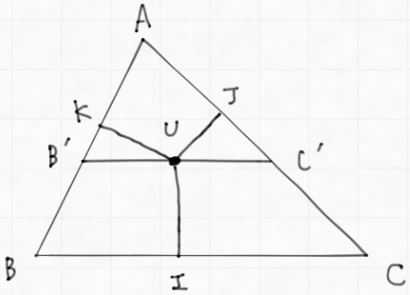
$$PB : PC = x : a-x = \frac{ac^2}{b^2+c^2} : \frac{ab^2+\cancel{ac^2}-\cancel{ac^2}}{b^2+c^2} = \mathbf{c^2 : b^2}$$

(2) (1)と同様に $QC : QA = a^2 : c^2$, $RA : RB = b^2 : a^2$

ここで $\dfrac{AR}{RB}\times\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{CQ}{QA} = \dfrac{b^2}{a^2}\times\dfrac{c^2}{b^2}\times\dfrac{a^2}{c^2} = 1$ だからチェバの定理の逆より

AP, BQ, CRは一定で交わることが示された.

証明終



(3) BCと平行な直線B'C'を考え、Uがこの上を動くものとする.

UIは一定の値だから. (1)より UK^2+UJ^2 は $UB' : UC' = AC'^2 : AB'^2$ のとき最小となるが. △ABC ∽ △AB'C' だから

$$UB' : UC' = c^2 : b^2$$

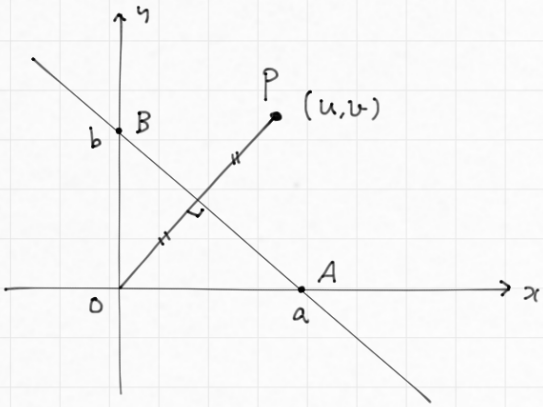
したがってAUの延長は. BCと交わる点をPとすると $PB : PC = c^2 : b^2$ となる. これはUはAP上にあることを示している

同様に. CA, ABの平行線を用いて考えることで. Uは(2)のMと一致することが分かる.

証明終

大阪医科薬科大学2021後

5



(1) 直線ABは $y=-\frac{b}{a}x+b$

$\overrightarrow{OP}\perp AB$ だから $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=(-a,b)\cdot(u,v)$

$=-au+bv=0$ …①

OPの中点 $\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right)$ がABとにあるので

$\frac{v}{2}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{u}{2}+b \iff av=bu+2ab$ …②

①,②を連立 $u=\frac{2ab^2}{a^2-b^2}$, $v=\frac{2a^2b}{a^2-b^2}$ $\quad a=\frac{v^2}{2u}+\frac{1}{2}u,\ b=\frac{1}{2}v+\frac{u^2}{2v}$

(2) (1)の結果と $ab=1$ を満たす u,v をもとめる

$$\left(\frac{v^2}{2u}+\frac{1}{2}u\right)\left(\frac{1}{2}v+\frac{u^2}{2v}\right)=1$$

$$(v^2+u^2)(v^2+u^2)=4uv$$

$u=r\cos\theta$, $v=r\sin\theta$ を代入

$$(r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta)^2=4r^2\cos\theta\sin\theta$$

$$r^2=2\sin2\theta \quad (\because u>0,\ v>0 \text{ より } r\neq0)$$