山口大学2022

1 (1) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1)-(2x)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	+	+	+
$f''(x)$		+	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\log 2$	$\nearrow$

$x \geqq 0$で $f''(x) = 0$ となるのは $x=1$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = 0$

$f(x)$の増減,凹凸は右のようになる

$f(x)$ の変曲点は **$(1, \log 2)$**

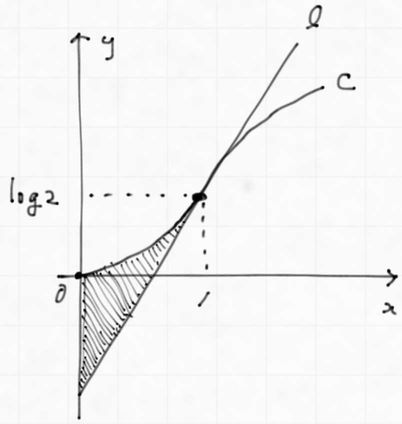
$f'(1) = \dfrac{2\cdot 1}{1+1} = 1$. $f(1) = \log 2$ だから lの方程式は $y = x - 1 + \log 2$

$f(x) - (x-1+\log 2) = g(x)$ とおくと $g'(x) = f'(x) - 1 = -\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

となるので $g'(x)$ は常に負であり. $g(x)$は単調に減少し. $g(1) = f(1) - 1 + 1 - \log 2 = 0$

となるので. $x \geqq 0$ の範囲で $g(x) = 0$ は $x=1$のみを解にもつ.

すなわち. Cと lは $x=1$ のみを共有点にもつ



(2) (1)より. 面積をもとめる図形は右のようになる

$$\int \log(x^2+1)\,dx = x\log(x^2+1) - \int x\,\frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= x\log(x^2+1) - \int 2 - \frac{2}{x^2+1}\,dx$$

$$= x\log(x^2+1) - 2x + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

面積をSとして

$$S = \int_0^1 \log(x^2+1) - x + 1 - \log 2\,dx$$

$$= \left[x\log(x^2+1) - 2x - \frac{1}{2}x^2 + x - x\log 2\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \cancel{\log 2} - 2 - \frac{1}{2} + 1 - \cancel{\log 2} + 2\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx}$$

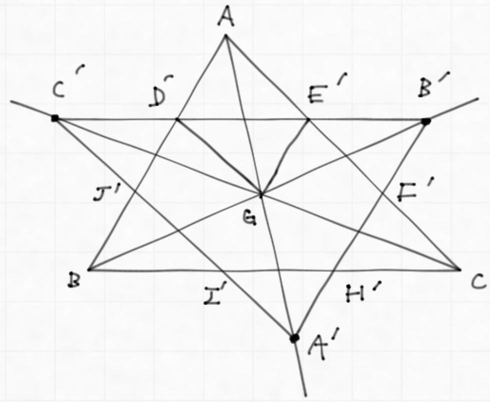
〰部について $x = \tan\theta$ とおく $\left(\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta},\ \begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}\right)$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

したがって

$$S = -\frac{3}{2} + 2\times\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{\pi-3}{2}}$$

山口大学2022



2 (1) $\overrightarrow{GB'} = -\vec{b}$ $\quad \overrightarrow{GC'} = -\vec{c}$

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{GC'} - \overrightarrow{GB'} = -\vec{c} + \vec{b} = \overrightarrow{CB}$$

よって $BC \parallel B'C'$

(2) GはTの重心だからAGとBCの交点はBCの中点

$$k\vec{a} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \qquad (kは実数)$$

同様に

$$l\vec{b} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} \qquad (lは実数)$$

辺々引いて

$$k\vec{a} - l\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$\vec{a}$と$\vec{b}$は互いに1次独立だから、上式が成り立つのは $k = l = -\frac{1}{2}$ のとき。

このとき $-\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ であり $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ が成り立っている

(3) B′とC′を1:2 および 2:1に内分する点をD′, E′とすると

$$\overrightarrow{GD'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GB'} = -\frac{2}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b} = -\frac{2}{3}(-\vec{a}-\vec{b}) - \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

これはD′がABを1:2に内分する点であることを示している

$$\overrightarrow{GE'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GC'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b} = -\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}(-\vec{a}-\vec{c}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

これはE′がACを1:2に内分する点であることを示している

以上より、B′C′はAB およびACと交わっていることが示された。

(4) F′, H′, I′, J′ と右上のように定める

$\overrightarrow{C'D'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ であるが、同様に $\overrightarrow{C'J'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ も成り立つ

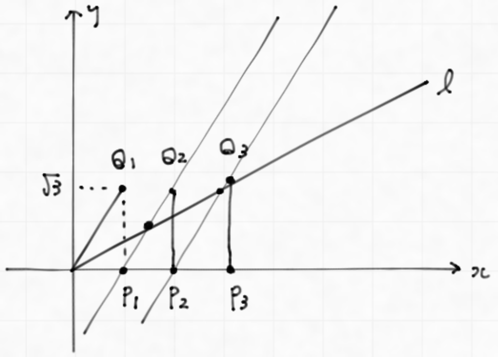
したがって △C′D′J′ は△ABCと相似で、相似比が$\frac{1}{3}$だから面積Sの$\frac{1}{9}$

対称性から △B′E′F′, △A′I′H′ も相似で面積は$\frac{1}{9}S$

$$共通部分の面積 = \triangle ABC - \triangle C'D'J' - \triangle B'E'F' - \triangle A'I'H'$$

$$= S - \frac{1}{9}S - \frac{1}{9}S - \frac{1}{9}S = \mathbf{\frac{2}{3}S}$$

山口大学2022



3 (1) $OP_2 = OP_1 \times \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ $\quad$ **$P_2(2, 0)$**

$OP_3 = OP_2 \times \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$

$OP_4 = OP_3 \times \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{39}{8} + \frac{1}{8} = 5$ $\quad$ **$P_4(5, 0)$**

(2) $OP_{n+1} = OP_n \times \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ より

$\alpha_{n+1} = \frac{3}{2}\alpha_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

両辺を $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ 倍

$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\alpha_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha_n + \frac{2}{3^{n+1}}$

$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha_n\right\}$ の階差数列が $\left\{\frac{2}{3^{n+1}}\right\}$ だから $n \geqq 2$ のとき.

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha_n = \frac{2}{3} \times \alpha_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \times \frac{1 - \frac{1}{3^{n-1}}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3^n}$

$\alpha_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n} = \frac{3^n - 1}{2^n} \quad (n \geqq 2)$

上式に $n=1$ を代入すると $\alpha_1 = \frac{3^1 - 1}{2^1} = 1$ となり上式は $n=1$ でも成り立っている

$\therefore$ **$\alpha_n = \frac{3^n - 1}{2^n}$**

(3) $\angle P_1OQ_1 = \frac{\pi}{3}$ だから l : $y = \tan\frac{\pi}{6} x = \frac{1}{\sqrt{3}} x$

P_n を通って傾きが OQ_1 と等しい $\sqrt{3}$ となる直線は $y = \sqrt{3}(x - \alpha_n) \ldots$ ①

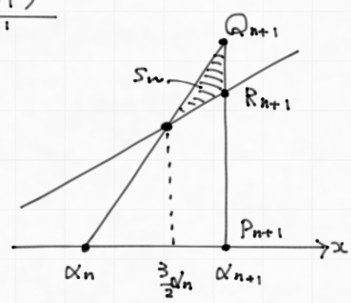
Q_{n+1} はこの直線上にあるので. P_nQ_{n+1} と l との交点は

$\frac{1}{\sqrt{3}} x = \sqrt{3} x - \sqrt{3}\alpha_n \qquad x = \frac{3}{2}\alpha_n = \frac{3^{n+1} - 3}{2^{n+1}}$

交点は $\left(\frac{3^{n+1} - 3}{2^{n+1}}, \frac{3^{n+1} - 3}{2^n}\right)$

(4) ①で $x = \alpha_{n+1}$ のとき $y = \sqrt{3}(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = \frac{\sqrt{3}(3^{n+1} - 1 - 2 \cdot 3^n + 2)}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{3}(3^n + 1)}{2^{n+1}}$

よって $Q_{n+1}\left(\frac{3^{n+1} - 1}{2^{n+1}}, \frac{\sqrt{3}(3^n + 1)}{2^{n+1}}\right)$



右図中 R_{n+1} の y 座標は l に $x = \alpha_{n+1}$ を代入して $\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_{n+1}$

$Q_{n+1}R_{n+1}$ を底辺と考えて S_n をもとめる

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}(3^n + 1)}{2^{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{2^{n+1}}\right) \times \left(\frac{3^{n+1} - 1}{2^{n+1}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\cancel{\sqrt{3} \cdot 3^{n+1}} + 3\sqrt{3} - \cancel{\sqrt{3} \cdot 3^{n+1}} + \sqrt{3}}{3 \cdot 2^{n+1}} \times \frac{\cancel{3^{n+1}} - 1 - \cancel{3^{n+1}} + 3}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} \times 2}{3 \cdot 2^{2n+3}} = \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 2^{2n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}}{1 - \frac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}}$$

山口大学2022

4 (1) $(h\circ g)(n) = h(g(n)) = 14 - g(n) = 14 - 6 + n = \mathbf{8+n}$

$(g\circ h)(n) = g(h(n)) = 6 - h(n) = 6 - 14 + n = \mathbf{n-8}$

(2) $(f\circ g)(n) = f(g(n)) = f(6-n)$

ここで $f(3-n) = f(3+n)$ で n を $n-3$ とすると

$f(3-n+3) = f(3+n-3) \iff f(6-n) = f(n)$

となるので、$(f\circ g)(n) = f(n)$ が任意の整数 n について成り立つ.

$(f\circ h)(n) = f(h(n)) = f(14-n)$

$= f(7+(7-n)) = f(7-(7-n))$ (∵条件2)

$= f(n)$

よって任意の整数 n について $(f\circ h)(n) = f(n)$ が成立する.

(3) (2)より $f(n) = f(6-n)$ …① , $f(n) = f(14-n)$ …②

② で n を $6-n$ とすると $f(6-n) = f(14-6+n) = f(n+8)$

① と併せて. $f(n+8) = f(n)$ …③

2022 を 8 で割った余りは 6 だから

$f(2022) = f(2014) = f(2006)$

$= \cdots = f(6) = f(0) = 0$ (① より $f(6) = f(0)$)

(4) (3) ③ より $f(n)$ について. n を 8 で割った余りが等しいとき. $f(n)$ は等しい値をとる

$n \equiv 0 \pmod 8$ (以下合同式は全て 8 を法とする.) のとき $f(n) = 0$

$n \equiv 6$ のとき (3) より $f(n) = 0$

① より $f(5) = f(1)$, $f(4) = f(2)$ だから.

$n \equiv 5$, $m \equiv 1$ のとき. $f(n) = f(m)$.

$n \equiv 4$, $m \equiv 2$ 〃 $f(n) = f(m)$

8で割った余りは 0, 1, …, 7 の 8 通り.

その中で. 余りが 0, 6 のとき $f(n) = 0$ で. 余りが 1, 5 のとき. $f(n)$ の値は等しく.

2, 4 のときも $f(n)$ の値は等しい.

8通りの中に同じ値をとる組み合わせが 3 組存在するため. $f(n)$ の値は最大でも 5 種類となる.

よって A の要素の個数は 5 以下である.