滋賀医大2021

1 (1) Pを(a, b)とおくと Pを通る傾き1の直線は $y=x-a+b$

この直線とx軸の交点は$y=0$を代入して　$x=a-b$

この点が有理点であるとき $x=\frac{n}{m}$ と表せる（m, nは互いに素な整数で $m \geqq 1$とする）

$$a-b=\frac{n}{m} \quad \cdots ①$$

(a, b)は $x^2-y^2=1$ 上にあるので

$$a^2-b^2=1 \quad \cdots ②$$

①, ②より bを消去して

$$a^2-\left(a-\frac{n}{m}\right)^2=1 \iff 2a\frac{n}{m}-\frac{n^2}{m^2}=1 \iff 2na=\frac{m^2+n^2}{m} \quad \cdots ③$$

$n=0$のとき ③は成立しないので $n \neq 0$ なので

$$a=\frac{m^2+n^2}{2nm}$$

これは aが有理数であることを示している。

また　$b=a-\frac{n}{m}=\frac{m^2-n^2}{2nm}$ より bも有理数である。

以上より、Pは有理点である。

(2) 正の整数nを用いて

$$x+y=n, \quad x-y=\frac{1}{n}$$

と表すと $x=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right), y=\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)$ となり、nは整数なので、このx, yは有理数である。

このとき $x^2-y^2=\left\{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right)\right\}^2-\left\{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)\right\}^2=1$

となるので、x, yは $x^2-y^2=1$ 上にある。

また
$$x^2+y^2=\left\{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)\right\}^2=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2n^2}$$

となるがnを大きくすると $x^2+y^2 \to \infty$ となるので $x^2+y^2>r^2$ を満たすnは必ず存在する。

以上より $x^2-y^2=1$上の有理点で原点との距離がrよりも大きいものは必ず存在する。

(3) $x^2-6y^2=7$上に有理点が存在すると仮定し、これを

$$x=\frac{n}{m}, \quad y=\frac{q}{p} \quad (n, m\text{は互いに素}, p, q\text{も互いに素な整数})$$

と表す。

代入して　$\frac{n^2}{m^2}-\frac{6q^2}{p^2}=7 \iff n^2p^2-6m^2q^2=7m^2p^2$

$$n^2p^2=m^2(6q^2+7p^2)$$

ここでnとmは互いに素なので上式が成り立つためには pがmの倍数でなければいけないので

$$p=mp' \quad (p'\text{は}q\text{と互いに素な整数})$$

滋賀医大2021

1つづき

と表すことができる.

これを代入して

$$n^2\cancel{m^2}p'^2=\cancel{m^2}(6q^2+7m^2p'^2)$$

$$6q^2=p'^2(n^2-7m^2)$$

ここで p' と q は互いに素で. $6=2^1\cdot3^1$ だから上式が成り立つのは $p'=1$ のときのみ.

$$6q^2=n^2-7m^2$$

$$6q^2+7m^2=n^2$$

両辺を7で割った余りを考えて

$$-q^2\equiv n^2 \pmod 7$$

$$n^2+q^2\equiv 0 \pmod 7$$

$n\equiv1,2,3,4,5,6,0$ のとき. $n^2\equiv1,4,2,2,4,1,0$

となるので. $n^2+q^2\equiv0$ となるのは $n^2\equiv q^2\equiv0 \pmod 7$ のときのみ.

よって $n=7n'$, $q=7q'$ である

このとき

$$6\cdot7^2q'^2=7^2n'^2-7\cdot m^2$$

$$6\cdot7q'^2-7n'^2=-m^2$$

$$m^2=7(n'^2-6q'^2)$$

だから m も7の倍数となるが. これでは m と n のいずれも7の倍数となってしまうので

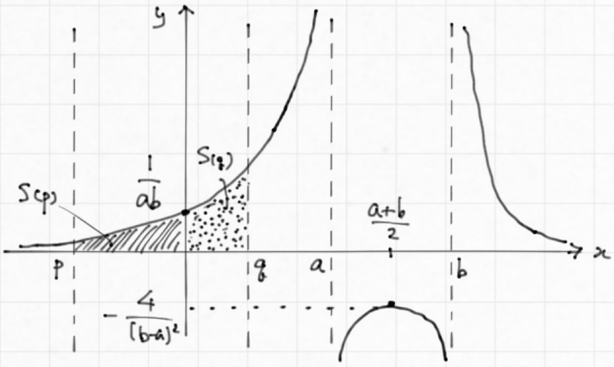
n と m が互いに素であることに矛盾する

以上より. $x^2-6y^2=7$ 上に有理点は存在しない.

滋賀医大2021

2 $f(x)=\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ とおく

$f'(x)=\dfrac{-2x+a+b}{(x-a)^2(x-b)^2}$



$f'(x)=0$ となるのは $x=\dfrac{a+b}{2}$

$f(x)$ の増減は下のようになる

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{a+b}{2}$	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	/	$+$	0	$-$	/	$-$
$f(x)$	↗	/	↗		↘	/	↘

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0$　$\lim_{x\to b-0}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to b+0}f(x)=\infty$

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=-\dfrac{4}{(b-a)^2}$　$\lim_{x\to a-0}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a+0}f(x)=-\infty$

(1) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\frac{1}{a-b}\int\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\,dx=\frac{1}{a-b}\left\{\log|x-a|-\log|x-b|\right\}=\frac{1}{b-a}\log\left|\frac{x-b}{x-a}\right|$

よって $\displaystyle S(p)=\int_p^0 f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{b-p}{a-p}\right)$

$\displaystyle S(q)=\int_0^q f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{b-q}{a-q}\right)-\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{b}{a}\right)$

$S(p)=S(q)$ より $2\log\left(\frac{b}{a}\right)=\log\left(\frac{b-q}{a-q}\right)+\log\left(\frac{b-p}{a-p}\right)$

$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b-q}{a-q}\times\frac{b-p}{a-p}$

$\cancel{a^2b^2}-ab^2p-ab^2q+b^2pq=\cancel{a^2b^2}-a^2bp-a^2bq+a^2pq$

$(b^2-a^2)pq+ab(a-b)p+ab(a-b)q=0$

$b>a$ だから $b-a\neq0$．上式の両辺を $b-a$ で割って．

$(b+a)pq-abp-abq=0$　　$\therefore$　$(p+q)ab=pq(a+b)$　　証明終

(2) (1)の右辺について $p<0$, $q>0$, $a+b>0$ だから右辺は負であり．したがって $p+q<0$

$p<p+q<0$ より $\dfrac{p}{p+q}>1$

(1)より $\dfrac{p}{p+q}=\dfrac{ab}{a+b}\cdot\dfrac{1}{q}$ だから $\dfrac{ab}{a+b}\cdot\dfrac{1}{q}>1$ すなわち $\dfrac{ab}{a+b}>q$　　証明終

(3) 右辺－左辺 $=\dfrac{1}{b-a}\log\dfrac{b}{a}-S(p)=\cancel{\dfrac{1}{b-a}\log\dfrac{b}{a}}-\cancel{\dfrac{1}{b-a}\log\dfrac{b}{a}}+\dfrac{1}{b-a}\log\left(\dfrac{b-p}{a-p}\right)$

ここで　$b-p>a-p>0$ だから $\dfrac{b-p}{a-p}>1$

よって $\log\dfrac{b-p}{a-p}>0$ であり．　$S<\dfrac{1}{b-a}\log\dfrac{b}{a}$ が示された．　　証明終

(4) $g(x)=\log x$ を考える．$g'(x)=\dfrac{1}{x}$，$g''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ だから $g'(x)$ は単調に減少する …①

$a\leqq x\leqq b$ について．平均値の定理より

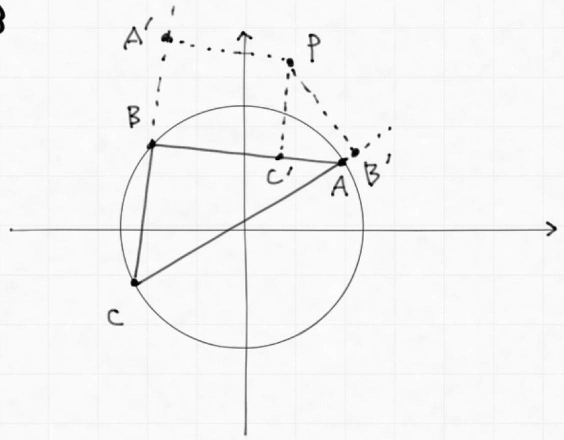
$\dfrac{\log b-\log a}{b-a}=g'(c)$，$a<c<b$ を満たす c が存在する．

①より　$g'(a)>g'(c)$ だから　$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b-a}\log\dfrac{b}{a}>S$ $(\because(3))$　　よって $S<\dfrac{1}{a}$

証明終

滋賀医大2021

3



(1) AB上の点をX(z)とすると

ABとAXは平行だから $\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数となる

このとき
$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = \overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}$$

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\bar{z}-\bar{\alpha}}{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}$$

$$z\bar{\beta} - z\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} + \cancel{\alpha\bar{\alpha}} = \bar{z}\beta - \bar{z}\alpha - \bar{\alpha}\beta + \cancel{\alpha\bar{\alpha}} \quad \cdots ①$$

$|\alpha|=1$ より $\alpha\bar{\alpha}=1$ 　同様に $\beta\bar{\beta}=1$

①の両辺に $\alpha\beta$ をかけると

$$\cancel{\alpha}\beta z\cancel{\bar{\beta}} - z\cancel{\bar{\alpha}}\cancel{\alpha}\beta - \alpha\cancel{\bar{\beta}}\alpha\cancel{\beta} = \bar{z}\beta\alpha\beta - \bar{z}\alpha^2\beta - \cancel{\bar{\alpha}}\beta\cancel{\alpha}\beta$$

$$\alpha z - \beta z - \alpha^2 - \alpha\beta^2\bar{z} + \alpha^2\beta\bar{z} + \beta^2 = 0$$

$$(\alpha-\beta)z + \alpha\beta(\alpha-\beta)\bar{z} + (\beta+\alpha)(\beta-\alpha) = 0$$

$\alpha \neq \beta$ だから $\alpha-\beta \neq 0$ 両辺を $\alpha-\beta$ で割る

$$z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha+\beta$$

証明終

(2) γ' はAB上にあるので $\gamma' + \alpha\beta\overline{\gamma'} = \alpha+\beta \quad \cdots ②$

PC'⊥ABより $\frac{\gamma'-w}{\beta-\alpha}$ は純虚数. $\frac{\gamma'-w}{\beta-\alpha} = -\overline{\left(\frac{\gamma'-w}{\beta-\alpha}\right)}$

整理して $(\gamma'-w)(\bar{\beta}-\bar{\alpha}) = -(\overline{\gamma'}-\bar{w})(\beta-\alpha)$

② より $\overline{\gamma'} = \bar{\alpha}+\bar{\beta}-\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma'$ を代入

$$(\gamma'-w)(\bar{\beta}-\bar{\alpha}) = -(\bar{\alpha}+\bar{\beta}-\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma'-\bar{w})(\beta-\alpha)$$

両辺に $\alpha\beta$ をかける

$$(\gamma'-w)(\alpha-\beta) = -(\beta+\alpha-\gamma'-\alpha\beta\bar{w})(\beta-\alpha)$$

$\beta-\alpha$ で割る 　$-\gamma'+w = -\beta-\alpha+\gamma'+\alpha\beta\bar{w}$

整理して 　$2\gamma' = \alpha+\beta+w-\alpha\beta\bar{w}$

証明終

滋賀医大2021

3 つづき

(3) α', β', γ' が一直線上にあるとき $\dfrac{\alpha'-\gamma'}{\beta'-\gamma'}$ は実数

(2)と同様に

$$2\alpha' = \beta+\gamma+w-\beta\gamma\overline{w} \qquad 2\beta' = \gamma+\alpha+w-\gamma\alpha\overline{w}$$

が成り立つ

$$\frac{\alpha'-\gamma'}{\beta'-\gamma'} = \overline{\left(\frac{\alpha'-\gamma'}{\beta'-\gamma'}\right)}$$

$$\frac{\cancel{\beta}+\gamma+\cancel{w}-\beta\gamma\overline{w}-\alpha-\cancel{\beta}-\cancel{w}+\alpha\beta\overline{w}}{\gamma+\cancel{\alpha}+\cancel{w}-\gamma\alpha\overline{w}-\cancel{\alpha}-\beta-\cancel{w}+\alpha\beta\overline{w}} = \frac{\gamma-\alpha-\beta\gamma\overline{w}+\alpha\beta\overline{w}}{\gamma-\beta-\gamma\alpha\overline{w}+\alpha\beta\overline{w}} = \frac{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}-\overline{\beta}\overline{\gamma}w+\overline{\alpha}\overline{\beta}w}{\overline{\gamma}-\overline{\beta}-\overline{\gamma}\overline{\alpha}w+\overline{\alpha}\overline{\beta}w}$$

$$\cancel{1}-\gamma\overline{\beta}-\cancel{\overline{\alpha}w}+\cancel{\overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma w}-\alpha\overline{\gamma}+\alpha\overline{\beta}+\cancel{\overline{\gamma}w}-\cancel{\overline{\beta}w}-\cancel{\beta\overline{w}}+\cancel{\gamma\overline{w}}+\overline{\alpha}\beta w\overline{w}-\overline{\alpha}\gamma w\overline{w}$$

$$+\cancel{\alpha\beta\overline{\gamma}\overline{w}}-\cancel{\alpha\overline{w}}-\beta\overline{\gamma}w\overline{w}+\cancel{w\overline{w}} = \cancel{1}-\gamma\overline{\alpha}-\cancel{\overline{\beta}w}+\cancel{\overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma w}-\beta\overline{\gamma}+\beta\overline{\alpha}+\cancel{\overline{\gamma}w}-\cancel{\overline{\alpha}w}$$

$$-\cancel{\alpha\overline{w}}+\cancel{\gamma\overline{w}}+\alpha\overline{\beta}w\overline{w}-\overline{\beta}\gamma w\overline{w}+\cancel{\alpha\beta\overline{\gamma}\overline{w}}-\cancel{\beta\overline{w}}-\alpha\overline{\gamma}w\overline{w}+\cancel{w\overline{w}}$$

$$-\gamma\overline{\beta}-\alpha\overline{\gamma}+\alpha\overline{\beta}+\gamma\overline{\alpha}+\beta\overline{\gamma}-\beta\overline{\alpha}+(\overline{\alpha}\beta-\overline{\alpha}\gamma-\beta\overline{\gamma}-\alpha\overline{\beta}+\overline{\beta}\gamma+\alpha\overline{\gamma})|w|^2=0$$

$$(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\gamma}+\overline{\beta}\gamma+\alpha\overline{\gamma}-\overline{\alpha}\gamma)(|w|^2-1)=0 \quad \cdots③$$

$\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\gamma}+\overline{\beta}\gamma+\alpha\overline{\gamma}-\overline{\alpha}\gamma=0$ のとき 両辺に$\alpha\beta\gamma$をかけて

$$\beta^2\gamma-\alpha^2\gamma-\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\alpha^2\beta-\beta\gamma^2=0$$

$$(\beta-\gamma)\alpha^2+(\gamma^2-\beta^2)\alpha+\beta\gamma(\beta-\gamma)=0$$

$$(\beta-\gamma)(\alpha^2-(\beta+\gamma)\alpha+\beta\gamma)=0$$

$$(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=0$$

これは α, β, γ が異なる3点であることに矛盾するので $\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\gamma}+\overline{\beta}\gamma+\alpha\overline{\gamma}-\overline{\alpha}\gamma\neq0$

よって ③ より $|w|=1$

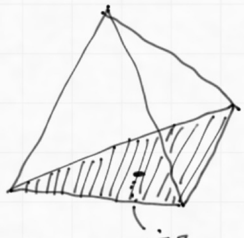
∴ A', B', C' が一直線上にあるとき，Pは単位円周上に存在する.

滋賀医大2021

4 (1) (i) 1つの面は他の3面と接しているので必ず4色を使う.　　∴ 少なくとも**4色**が必要

(ii) n色中の4色を使う.　$_nC_4$

特定の一色を右図の底面に固定



他3面のぬり方について

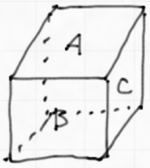
左図のように上から見た図を用いて考えると

円順列として考えることができる　$(3-1)! = 2$ 通り

以上より ぬり方の総数は $_nC_4 \times 2 = \dfrac{n!}{4!(n-4)!} \times 2 = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}$

(2) (i) 2色だと1つの頂点を作る,となりあう3面をぬり分けることができない

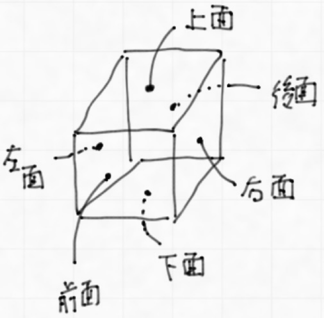
(右図A.B.Cの3面)



3色で,向かいあう面を同色にすることでぬり分けられる.

∴ 少なくとも**3色**が必要

(ii)



各面を左のように名付ける

(i) 3色でのぬり方　3色の選び方は $_nC_3$　ぬり方は1通り　$_nC_3$

(ii) 4色　〃　1つの色を3回使うと,必ずどこかで隣りあうので,

2色を2度ずつ使うことになる.

4色の選び方　$_nC_4$

2度使う2色の選び方　$_4C_2$

上下面は同色でこれを固定. 前後面も同色. 上下をひっくり返すことを

考えると左右のぬり分けは区別がない

まとめて　$_nC_4 \times {_4C_2} = 6 \cdot {_nC_4}$

(iii) 5色のぬり方

5色の選び方　$_nC_5$

2度使う色の選び方　$_5C_1$

上下面は同色でこれを固定. 残り4面は円順列 $(4-1)! = 6$ 通り.

上下ひっくり返したものは区別がない

まとめて　$_nC_5 \times 5 \times 6 \div 2 = 15\,{_nC_5}$

(iv) 6色のぬり方.

6色の選び方　$_nC_6$

上面を固定. 下面のぬり方 $_5C_1$

残り4面は円順列 $(4-1)! = 6$　　まとめて $_nC_6 \times 5 \times 6 = 30\,{_nC_6}$

(i)〜(iv)より

$$_nC_3 + 12\,{_nC_4} + 15\,{_nC_5} + 30\,{_nC_6} = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n^3-9n^2+32n-38)$$