宮崎大学2022

1　$2^x+2^{-x}=X$ とおく.　　相加相乗平均の公式より　$X=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

$X^3=8^x+8^{-x}+3\cdot 2^x+3\cdot 2^{-x}$　だから　$8^x+8^{-x}=X^3-3X$

$X^2=4^x+4^{-x}+2$　より　$4^x+4^{-x}=X^2-2$.

与式は　$X^3-3X-X^2+2-11\geqq 0$

$X^3-X^2-3X-9\geqq 0$

$(X-3)(X^2+2X+3)\geqq 0 \cdots ①$

ここで $X^2+2X+3=(X+1)^2+2>0$ だから ①を満たす X は

$X\geqq 3$

$2^x+2^{-x}\geqq 3$.

$2^x=t$ とおく.　$(t=2^x>0)$

$t+\frac{1}{t}\geqq 3$

$t^2-3t+1\geqq 0$

$t\geqq\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ t\leqq\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

よって　$0<t\leqq\frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad t\geqq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$0<2^x\leqq\frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad 2^x\geqq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

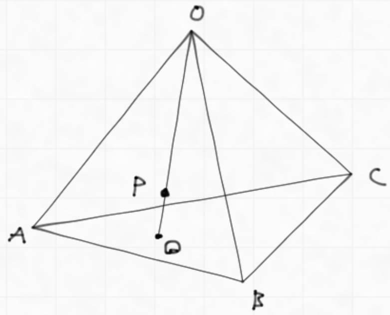
$x\leqq\log_2(3-\sqrt{5})-1,\quad x\geqq\log_2(3+\sqrt{5})-1$

2 (1) $3\vec{OP}+8(\vec{OP}-\vec{a})+7(\vec{OP}-\vec{b})+\vec{OP}-\vec{c}=\vec{0}$

$19\vec{OP}=8\vec{a}+7\vec{b}+\vec{c}$

$\vec{OP}=\frac{8}{19}\vec{a}+\frac{7}{19}\vec{b}+\frac{1}{19}\vec{c}=\frac{16}{19}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{7}{16}\vec{b}+\frac{1}{16}\vec{c}\right)=\frac{16}{19}\vec{OQ}$

$\therefore\ \vec{OQ}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{7}{16}\vec{b}+\frac{1}{16}\vec{c}$



(2) $\vec{CQ}=\vec{OQ}-\vec{c}$

$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{7}{16}\vec{b}-\frac{15}{16}\vec{c}$

$=\frac{8}{16}(\vec{a}-\vec{c})+\frac{7}{16}(\vec{b}-\vec{c})$

$=\frac{8}{16}\vec{CA}+\frac{7}{16}\vec{CB}=\frac{15}{16}\left(\frac{8}{15}\vec{CA}+\frac{7}{15}\vec{CB}\right)$

CQの延長とABの交点をRとすると $\vec{CR}=\frac{8}{15}\vec{CA}+\frac{7}{15}\vec{CB}$ であり、CQ : QR = 15 : 1

よって△ABQの面積は△ABCの $\frac{1}{16}$ 倍で $\frac{1}{16}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{64}$

(3) Gは△ABCの重心だから $\vec{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

OABCは1辺の長さが1の正四面体だから

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$ 同様に、$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$

$\vec{OG}\cdot\vec{AB}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{3}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$

$\vec{OG}\cdot\vec{AC}$ も同様で $\vec{OG}\cdot\vec{AC}=0$

以上より、$\vec{OG}$ は平面ABCと垂直である

(4) $|\vec{OG}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{9}(1+1+1+1+1+1)=\frac{2}{3}$

$|\vec{OG}|=\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\vec{OG}\perp ABC$ だから四面体OABQの体積は $\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{64}\times\sqrt{\frac{2}{\cancel{3}}}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{192}$

OQ : PQ = 19 : 3 なので

四面体PABQの体積は $\frac{\sqrt{2}}{\cancel{192}_{64}}\times\frac{\cancel{3}}{19}=\frac{\sqrt{2}}{1216}$

3

(1) $a_2 = a_1 + b_1 = \frac{1}{2} + 2 = \mathbf{\frac{5}{2}}$ $\quad b_2 = 2a_1 + 1 = 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = \mathbf{2}$

$a_3 = a_2 + b_2 = \frac{5}{2} + 2 = \mathbf{\frac{9}{2}}$ $\quad b_3 = 2a_2 + 1 = 5 + 1 = \mathbf{6}$

(2) 左辺に漸化式を代入して比較する

$a_{n+1} + pb_{n+1} + q = a_n + b_n + p(2a_n + 1) + q$

$= (2p+1)a_n + b_n + p + q = r(a_n + pb_n + q)$ だから

$2p+1 = r, \quad 1 = rp, \quad p + q = rq$

これらを連立する $\quad 1 = 2p^2 + p \quad\quad p = \frac{1}{2}, -1$

$p = \frac{1}{2}$ のとき. $\quad r = 2, \quad q = \frac{1}{2}$

$p = -1$ のとき $\quad r = -1, \quad q = \frac{1}{2}$ $\quad\quad (p, q, r) = \mathbf{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2), (-1, \frac{1}{2}, -1)}$

(3) $(p, q, r) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ のとき.

$a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2} = 2(a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2})$ より.

$a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2} = (a_1 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}) \times 2^{n-1}$

$a_n + \frac{1}{2}b_n = 2^n - \frac{1}{2} \quad \cdots ①$

$(p, q, r) = (-1, \frac{1}{2}, -1)$ のとき.

$a_{n+1} - b_{n+1} + \frac{1}{2} = -(a_n - b_n + \frac{1}{2})$ より

$a_n - b_n + \frac{1}{2} = (a_1 - b_1 + \frac{1}{2})(-1)^{n-1}$

$a_n - b_n = (-1)^n - \frac{1}{2} \quad \cdots ②$

$① \times 2 + ②$ $\quad 3a_n = 2^{n+1} - 1 + (-1)^n - \frac{1}{2}$ $\quad\quad a_n = \mathbf{\frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^n}{3} - \frac{1}{2}}$

$b_n = a_n - (-1)^n + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{2^{n+1}}{3} - \frac{2}{3}(-1)^n}$

(4) $\{c_n\}, \{d_n\}$ について $c_1 > 0, d_1 > 0$ だから帰納的に $c_n > 0, d_n > 0$ が分かる.

漸化式について底を2とした対数をとる.

$$\begin{cases} \log_2 c_{n+1} = \log_2 c_n + \log_2 d_n \\ \log_2 d_{n+1} = 2\log_2 c_n + 1 \end{cases}$$

$\log_2 c_n = a_n, \ \log_2 d_n = b_n$ とすれば. a_n, b_n の与えられた漸化式と同じものになるので

$\log_2 c_n = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^n}{3} - \frac{1}{2}$, $\log_2 d_n = \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{2}{3}(-1)^n$

$\therefore c_n = 2^{\frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^n}{3} - \frac{1}{2}}$, $d_n = 2^{\frac{2^{n+1}}{3} - \frac{2}{3}(-1)^n}$

$c_n^2 d_n = 2^{\frac{2^{n+2}}{3} + \cancel{\frac{2}{3}(-1)^n} - 1 + \frac{2^{n+1}}{3} - \cancel{\frac{2}{3}(-1)^n}} = 2^{\frac{2}{3}(2+1) - 1} = \mathbf{2^{2^{n+1}-1}}$

4　$f(x) = g(x) + 3\int_0^x e^{t-x} f(t)\,dt$ …①

(1) ①より

$$f(x) = g(x) + 3e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt \quad \cdots ②$$

両辺をxで微分

$$f'(x) = g'(x) - 3e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt + 3\cancel{e^{-x}}\cdot\cancel{e^{x}} f(x) \quad \cdots ③$$

②+③

$$f(x) + f'(x) = g(x) + g'(x) + 3f(x)$$

$$f'(x) = 2f(x) + g(x) + g'(x)$$

よって **$h(x) = g(x) + g'(x)$**

(2) $\left(e^{-2x} f(x)\right)'$

$$= -2e^{-2x} f(x) + e^{-2x} f'(x)$$

ここに(1)より $f'(x) = 2f(x) + g(x) + g'(x)$ を代入

$$= \cancel{-2e^{-2x} f(x) + 2e^{-2x} f(x)} + e^{-2x} g(x) + e^{-2x} g'(x) \quad = \mathbf{e^{-2x}\left(g(x) + g'(x)\right)}$$

(3) $e^{-2x} f(x)$ が定数関数だったとき、$\left(e^{-2x} f(x)\right)'$ は 0

$$e^{-2x}\left(g(x) + g'(x)\right) = 0$$

$e^{-2x} \neq 0$ だから $g(x) + g'(x) = 0$ が x の値にかかわらず成り立つ。

ここで $e^x g(x)$ を x で微分すると

$$\left(e^x g(x)\right)' = e^x g(x) + e^x g'(x) = e^x\left(g(x) + g'(x)\right) = 0$$

となるので、$e^x g(x)$ も定数関数であり、$e^x g(x) = C$ と表せる。（Cは定数）

$x = 0$ を代入すると $e^0 g(0) = 1 \times 1 = 1$ だから $C = 1$

よって $e^x g(x) = 1$ であり、 **$g(x) = e^{-x}$**

①で $x = 0$ とすると $f(0) = g(0) + 3\int_0^0 e^{t-x} f(t)\,dt = 1$ …④

$e^{-2x} f(x)$ は定数関数で $e^{-2\cdot 0} f(0) = 1$ だから $e^{-2x} f(x) = 1$ 　∴ **$f(x) = e^{2x}$**

(4) $g(x) = x^2 + 1$ のとき、

$$\left(e^{-2x} f(x)\right)' = e^{-2x}\left(x^2 + 1 + 2x\right) = (x+1)^2 e^{-2x}$$

両辺を積分

$$e^{-2x} f(x) = \int (x+1)^2 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}(x+1)^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\int e^{-2x}\times \cancel{2}(x+1)\,dx$$

（Eは積分定数）

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}(x+1)^2 - \frac{1}{2}e^{-2x}(x+1) + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2 + 4x + 2 + 2x + 2 + 1\right) + E$$

$x = 0$ として $f(0) = -\frac{5}{4} + E = 1$ （∵④）　$E = \frac{9}{4}$

∴ **$f(x) = -\frac{1}{4}\left(2x^2 + 6x + 5\right) + \frac{9}{4}e^{2x}$**

5

(1) $x_i + x_j = 10$ となるような組み合わせは (1.9), (2.8), (3.7), (4.6) の4通り。

$n=6$ で $x_1=1$, $x_2=2$ で、(*)の条件を満たすためには、

3と7のいずれか一方、4と6のいずれか一方、5、10 のカードを引く必要がある。

$x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$, $x_6=10$

(2) $n=7$ のとき、1.2.3.4.6.7.8.9 のカードから少なくとも5枚のカードを選ばなくてはならず、そのためには (1.9).(2.8).(3.7).(4.6) のペアが少なくとも1つは含まれてしまう。そのため、必ず和が10となるペアが含まれてしまい、(**)が必ず成立する

(3) ペアカード1組みともう1枚の3枚を引き、3枚目は必ずペアカード

ペアの選び方 ${}_4C_1$ 他の1枚のカード ${}_8C_1$

並べ方は他の1枚のカードが、1,2枚目のいずれかだから $2\times 2!$

もとめる確率は $\dfrac{{}_4C_1 \times {}_8C_1 \times 2\times 2!}{{}_{10}P_3} = \dfrac{4\cdot\cancel{8}\cdot 2\cdot\cancel{2}}{\underset{5}{\cancel{10}}\cdot 9\cdot\cancel{8}} = \mathbf{\dfrac{8}{45}}$

(4) ペアカードを1組み、他の2枚はペアでないカードを選ぶ

$${}_4C_1 \times ({}_8C_2 - {}_3C_1)$$

ペアカードのうち1つは必ず4枚目だから、もとめる確率は

$$\frac{{}_4C_1 \times ({}_8C_2 - {}_3C_1)\times {}_2C_1 \times 3!}{{}_{10}P_4} = \frac{\cancel{4}\cdot(\overset{5}{\cancel{28-3}})\times\cancel{2}\times\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{10}}\cdot\underset{3}{\cancel{9}}\cdot\cancel{8}\cdot 7} = \mathbf{\frac{5}{21}}$$