福井県立大学2022 後期

1 $10^3 \leqq 1.2^n < 10^4$ を満たすnをもとめる

常用対数をとる $\log_{10} 10^3 \leqq \log_{10} 1.2^n < \log_{10} 10^4$

$$3 \leqq n \log_{10} \frac{2^2 \cdot 3}{10} < 4$$

$$3 \leqq n(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1) < 4$$

$$3 \leqq n(0.6020 + 0.4771 - 1) < 4$$

$$3 \leqq n \times 0.0791 < 4$$

$$\frac{3}{0.0791} \leqq n < \frac{4}{0.0791}$$

$$37.926\cdots \leqq n \leqq 50.568\cdots$$

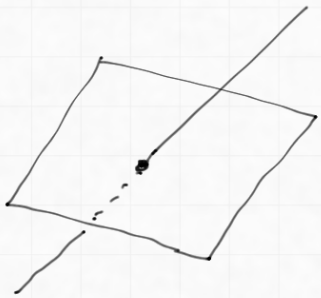
nは自然数だから **$38 \leqq n \leqq 50$**

2

A, Bを通る直線上の点をPと表すと.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\,AB \qquad (s\text{は任意の実数})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \cdots ①$$



Pが平面C.D.E上にあるとき.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \alpha\overrightarrow{CD} + \beta\overrightarrow{CE}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \cdots ②$$

① かつ ②

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2s = -1 - 4\alpha - \beta & \cdots ③ \\ -s = -3\beta & \cdots ④ \\ 2s = 1 + 3\alpha + 2\beta & \cdots ⑤ \end{cases}$$

④より $s = 3\beta$ を ③, ⑤ に代入

$$-4\alpha + 5\beta - 1 = 0 \cdots ⑥$$

$$3\alpha - 4\beta + 1 = 0 \cdots ⑦$$

⑥×4 + ⑦×5

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 1$$

$$s = 3$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

交点は $(-1, 0, 5)$

3　$f(x) = x^3 - 6x$

問1　$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$

$f'(x) = 0$ となるのは $x^2 - 2 = 0$ すなわち $x = \pm\sqrt{2}$

のときで $f(x)$ の増減は下のようになる

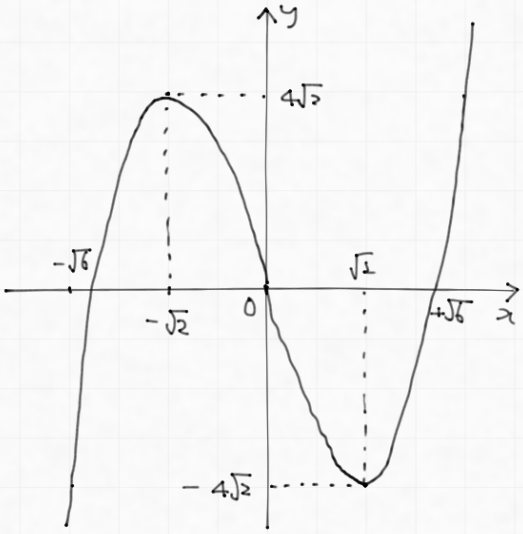
x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$

$f(x) = 0$ となるのは $x = 0,\ \pm\sqrt{6}$

グラフは右のようになる

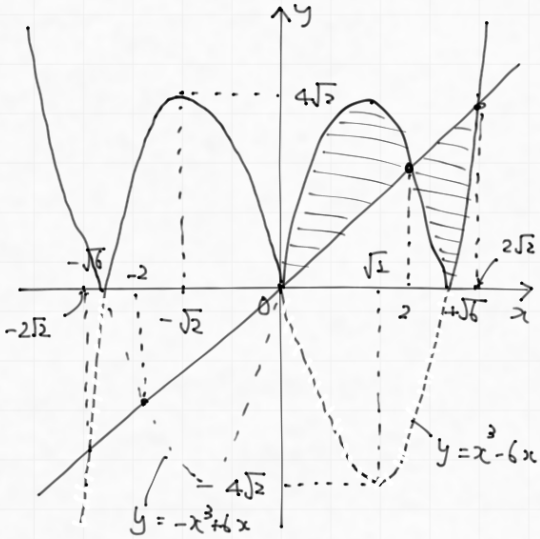


問2　$y = |f(x)| = \begin{cases} x^3 - 6x & (-\sqrt{6} \leqq x \leqq 0,\ x \geqq \sqrt{6}) \\ 6x - x^3 & (x < -\sqrt{6},\ 0 < x < \sqrt{6}) \end{cases}$

$f(x) = 2x$ となるのは $x^3 - 8x = 0 \iff x(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) = 0$ より　$x = 0,\ \pm 2\sqrt{2}$

$-f(x) = 2x$ となるのは $x^3 - 4x = 0 \iff x(x+2)(x-2) = 0$ より　$x = 0,\ \pm 2$

面積をもとめる図形は右図の斜線部



$$S = \int_0^2 -(x^3 - 6x) - 2x\,dx + \int_2^{\sqrt{6}} 2x - (-x^3 + 6x)\,dx$$

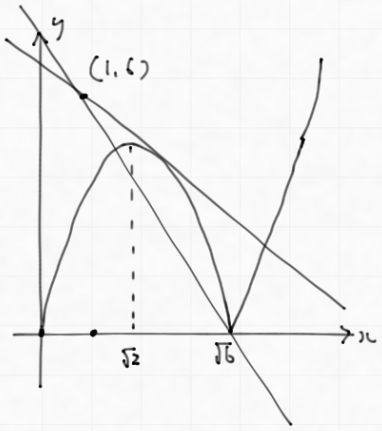
$$+ \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{2}} 2x - (x^3 - 6x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right]_0^2 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right]_{\sqrt{6}}^2$$

$$+ \left[4x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{2}}$$

$$= (-4 + 8) \times 2 - 0 - (-9 + 12) + (32 - 16) - (24 - 9)$$

$$= 8 - 3 + 16 - 15 = 6$$



問3　左図より、$(\sqrt{6}, 0)$を通る直線と　$\sqrt{2} < x < \sqrt{6}$で$y = |f(x)|$と接する直線が考えられる。

$\sqrt{2} < t < \sqrt{6}$を満たすtを接点のx座標とする。

$\sqrt{2} < x < \sqrt{6}$のとき　$y = -f(x)$だから　$y' = -f'(x)$

したがって接線は

$$y = -(3t^2 - 6)(x - t) - t^3 + 6t$$

これが、$(1, 6)$を通るとき

$$\cancel{6} = -3t^2 + \cancel{6} + 3t^3 - \cancel{6t} - t^3 + \cancel{6t}$$

$$2t^3 - 3t^2 = 0$$

$$t^2(2t - 3) = 0$$

$$t = 0, \frac{3}{2}$$

$\sqrt{2} < t < \sqrt{6}$を満たすのは　$t = \frac{3}{2}$

このとき接線は　$y = -\frac{3}{4}x + \frac{27}{4}$

$(1, 6)$, $(\sqrt{6}, 0)$を通る直線は　$y = \frac{-6}{\sqrt{6} - 1}(x - \sqrt{6})$

$$y = \frac{-6(\sqrt{6} + 1)}{5}(x - \sqrt{6})$$

以上、もとめる直線は

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{27}{4}, \quad y = -\frac{6(\sqrt{6} + 1)}{5}(x - \sqrt{6})$$

4

問1　1回の試行で出た目が同じになる確率は　$1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

$p_1=\frac{1}{6}$　.　$p_2=\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)\times{}_2C_1=\frac{5}{18}$

$p_3=\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^1\times\left(1-\frac{1}{6}\right)^2\times{}_3C_1=\frac{1}{216}+\frac{75}{216}=\frac{76}{216}=\frac{19}{54}$

問2　$n+1$回目で奇数回となる確率について.

(i) n回目まで奇数回だったとき.

$p_n\times\left(1-\frac{1}{6}\right)$

(ii) n回目まで偶数回だったとき.

$(1-p_n)\times\frac{1}{6}$

以上 (i)(ii) より　$p_{n+1}=\frac{5}{6}p_n+\frac{1}{6}(1-p_n)$

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{6}$$

問3　問2より

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

$\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$は初項 $p_1-\frac{1}{2}$, 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列.

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$p_n=-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$$