関西医科大学2021(後)

1 (1) $(x^2-15x-2)(x^2+15x-2)-5x^2+2021$

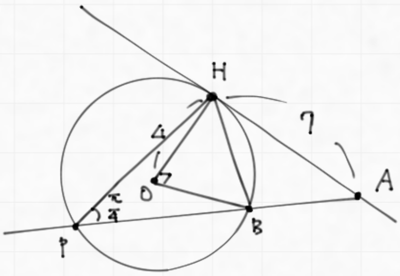
$=(x^2-2)^2-(15x)^2-5x^2+2021$

$=(x^2-2)^2-230x^2+460+1561$

$=(x^2-2)^2-230(x^2-2)+7\times 223$

$=(x^2-2-223)(x^2-2-7)=\mathbf{(x+15)(x-15)(x+3)(x-3)}$

(2)




円Cの中心をOとする

$\angle BOH = 2\angle BPH = \frac{\pi}{2}$ だから

$\triangle OBH$ は $OB=OH$ の直角二等辺三角形 $BH=\mathbf{4\sqrt{2}}$

接弦定理より $\angle BPH = \angle BHA = \frac{\pi}{4}$

余弦定理より $AB^2 = BH^2 + AH^2 - 2BH\cdot AH\cos\angle BHA$

$=32+49-56\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}=25$ $AB=\mathbf{5}$

方べきの定理 $AH^2=AB\cdot AP$ より $49=5\times AP$ $AP=\mathbf{\frac{49}{5}}$

$\triangle ABH = \frac{1}{2}BH\times HA\times\sin\angle BHA = \frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{4}^{2}\cancel{\sqrt{2}}\times 7\times\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}=\mathbf{14}$

$\triangle APH \backsim \triangle AHB$ であり、その比は、$AP:AH=\frac{49}{5}:7=7:5$

$\triangle APH = \left(\frac{7}{5}\right)^2\times 14 = \mathbf{\frac{686}{25}}$

# 関西医科大学2021(後)

換算後

1回目の試験の得点を $x_1', x_2' \cdots x_{20}'$

2回目の試験の得点を $y_1', y_2' \cdots y_{20}'$

$x_k \times 4 = x_k'$ , $y_k \times 3 = y_k'$

(3) 1回目の試験の得点を $x_1, x_2 \cdots x_{20}$

2回目の試験の得点を $y_1, y_2 \cdots y_{20}$ とする

$\sum_{k=1}^{20} x_k = 6 \times 20$ (以下 $\sum_{k=1}^{20}$ を $\Sigma$ と省略する) $\cdots$ ①

$\Sigma y_k = 11 \times 20$ $\cdots$ ②

$\frac{1}{20}\Sigma x_k^2 - 6^2 = 9$ $\cdots$ ③

$\frac{1}{20}\Sigma y_k^2 - 11^2 = 25$ $\cdots$ ④

$\frac{1}{20}\Sigma(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{20}\Sigma(x_k y_k) - \bar{x}\bar{y} \times 2 + \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{20}\Sigma x_k y_k - \bar{x}\bar{y} = 13.5$ $\cdots$ ⑤

$\Sigma x_k y_k = (13.5 + \bar{x}\bar{y}) \times 20$

キ. $\sqrt{9} = 3$　　ク $r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{13.5}{3 \cdot \sqrt{25}} = \frac{4.5}{5} = 0.9$

ケ $\frac{1}{20}(x_1' + x_2' + \cdots + x_{20}') = \frac{1}{20}(4x_1 + 4x_2 + \cdots + 4x_{20}) = \frac{1}{5}\Sigma x_k = 24$ ($\because$ ①)

コ $11.5 \times 3 = 34.5$

サ $\frac{1}{20}(x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_{20}'^2) - 24^2 = \frac{4^2}{20}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{20}^2) - 24^2 = 4^2(9 + 6^2) - 24^2 = 144$

シ $S_{y'}^2 = 25 \times 3^2 = 225$　　$S_{y'} = \sqrt{225} = 15$

ス. $r$は不変 0.9

セ. $\bar{x'} + \bar{y'} = 24 + 33 = 57$

ソ ×

タ $\frac{1}{20}\left\{(x_1' + y_1' - 57)^2 + (x_2' + y_2' - 57)^2 + \cdots + (x_{20}' + y_{20}' - 57)^2\right\}$

$= \frac{1}{20}\Sigma(4x_k + 3y_k - 4\bar{x} - 3\bar{y})^2$

$= \frac{16}{20}\Sigma x_k^2 + \frac{9}{20}\Sigma y_k^2 + 16\bar{x}^2 + 9\bar{y}^2 + \frac{12}{20}\Sigma x_k y_k - \frac{16}{20}\bar{x}^2 - \frac{9}{20}\bar{y}^2 - 24\bar{x}\bar{y} - 24\bar{x}\bar{y} + 24\bar{x}\bar{y}$

$= \frac{16}{20}S_x^2 + \frac{9}{20}S_y^2 + 16 \cdot \bar{x}^2 + 9 \cdot \bar{y}^2 + \frac{24}{20}\Sigma x_k y_k - 24 \cdot 6 \cdot 11$

$= 16\left(\frac{1}{20}S_x^2 - \bar{x}^2\right) + 9\left(\frac{1}{20}S_y^2 - \bar{y}^2\right) + 24\left(\frac{1}{20}\Sigma x_k y_k - 6 \cdot 11\right)$

$= 16 \times 9 + 9 \times 25 + 24 \cdot 13.5 = 693$

関西医科大学2021(後)

1

(1) 左辺 $= \cos A - \sin B = \cos A - \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$

$$= -2\sin\left(\frac{A + \frac{\pi}{2} - B}{2}\right)\sin\left(\frac{A - \frac{\pi}{2} + B}{2}\right)$$

$$= -2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\sin\left\{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)\right\}$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right) = \text{右辺}$$

証明終

(2) 左辺 − 右辺 $= \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x - \cos x}{2}\right) \quad \cdots (*)$$

ここで $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ だから. $-\sqrt{2} \leqq \sin x + \cos x \leqq \sqrt{2}$

より. $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \frac{\sin x + \cos x}{2} \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$

また $3 < \pi < 4$ より $\quad \frac{\pi}{4} > \frac{3}{4} > \frac{2\sqrt{2}}{4} \geqq \frac{\sin x + \cos x}{2}$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2} \leqq \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi + 2\sqrt{2}}{4} < \frac{\pi + \pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

よって $0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2} < \frac{\pi}{2}$ だから $\quad 0 < \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2}\right) < 1$

また、$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ より $\quad -\sqrt{2} \leqq \sin x - \cos x \leqq \sqrt{2}$ であり同様に. $0 < \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x - \cos x}{2}\right) < 1$

以上より. $(*)$ は必ず正の値をとり. $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ が成り立つことが示された.

(3) $f(\pi + x) = f(x)$ より $f(x)$ は周期 $\pi$ の周期関数だから $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で考える

$f'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$

$f'(x) = 0$ となるのは $\cos x = 0$ のときより $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

$\sin x = 0$ より $x = 0, \pi, 2\pi$ $\quad (\because -\pi < -1 < \sin x < 1 < \pi)$

$f(x)$ の増減は右のとおり

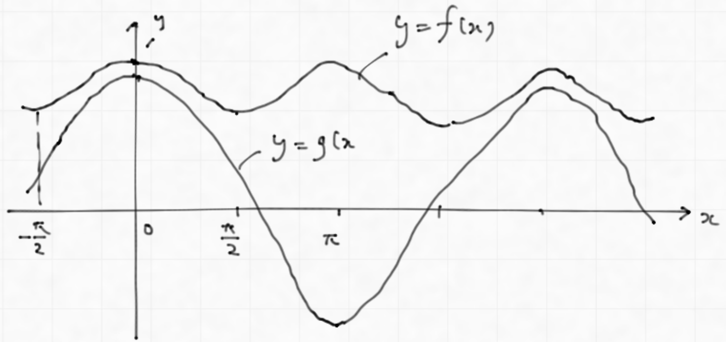
| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $\cos 1$ | $\nearrow$ | $1$ |

$g(2\pi + x) = g(x)$ だから $g(x)$ の周期は $2\pi$. $\quad (0 \leqq x \leqq 2\pi$ で調べる$)$

$g'(x) = -\cos(\cos x)\sin x$ $\qquad g'(x) = 0$ を解くと $x = 0, \pi, 2\pi$.

$g(x)$ の増減は右のとおり

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | | $0$ | | $0$ |
| $g(x)$ | $\sin 1$ | | $-\sin 1$ | | $\sin 1$ |



関西医科大学2021(後)

[1] (1) $a_1=1=1_{(2)}$　$a_2=4a_1+1=5=101_{(2)}$　$a_3=4a_2+1=21=10101_{(2)}$

(2) 漸化式は $a_{n+1}+\frac{1}{3}=4(a_n+\frac{1}{3})$ と変形でき，これは $\{a_n+\frac{1}{3}\}$ が初項 $a_1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ 公比4の等比数列であることを示している．よって $\{a_n+\frac{1}{3}\}$ の一般項 $a_n+\frac{1}{3}$ は

$$a_n+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{3}\cdot 4^n-\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{4^n-1}{3}}$$

(3) $\{b_n\}$ の一般項を $b_n=r^{n-1}$ として．

$$\sum_{k=1}^{m} b_k=\frac{1-r^m}{1-r}=\frac{r^m-1}{r-1}=\frac{4^n-1}{3}$$ より $r=4$，$\mathbf{m=n}$　$\mathbf{b_n=4^{n-1}}$

(4) (1)より $a_n$ を2進数で表したとき，$2n-1$ 桁の数で $101010\cdots01_{(2)}$ と1，0が交互に並ぶものと予測できる．これを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき．

(1)より予測は正しい

(ii) $n=k$ のとき．

$a_k=10101\cdots101_{(2)}$　(1は $k$ コ 0が $k-1$ コ並んだ，$2k-1$ 桁の数)

が成り立つと仮定する．

(3)より．$a_{k+1}=a_k+b_{k+1}=a_k+4^{k}=a_k+2^{2k}$

$$=\underbrace{10101\cdots101_{(2)}}_{2k-1\text{桁}}+\underbrace{1000\cdots00_{(2)}}_{2k+1\text{桁}}$$

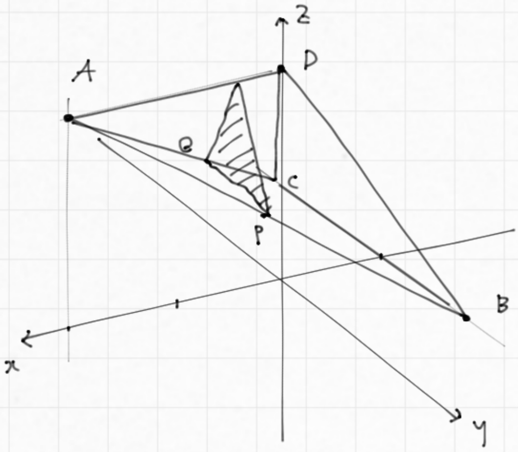
$$=\underbrace{1010101\cdots101_{(2)}}_{2k+1\text{桁}}$$

となるので，予測は $n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)(ii)より 予測は全ての自然数について成り立つ．

よって $a_n$ を2進法で表したとき，**$2n-1$ 桁**の数で，0は **$n-1$ 個**存在する

関西医科大学2021(後)




IV $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}2-2t\\0\\2-2t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-t\\+t\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-3t\\t\\2-2t\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}2-3t\\-t\\2-2t\end{pmatrix}$

$2-3t \geqq 0$ $\left(t \leqq \frac{2}{3}\right)$ のとき.

$x = 2-3t$ と AD の交点は $\begin{pmatrix}2-3t\\0\\2\end{pmatrix}$ で

断面は右のような三角形

$f(t) = \frac{1}{2} \times PQ \times (2-(2-2t)) = \frac{1}{2} \times 2t \times 2t = 2t^2 \leqq \frac{8}{9}$

$2-3t < 0$ $\left(\frac{2}{3} < t < 1\right)$ のとき

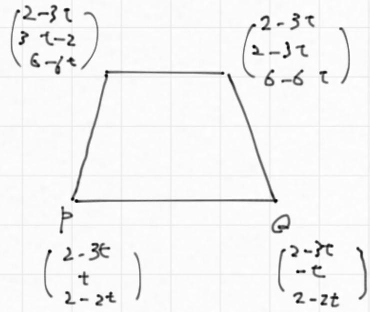
$\alpha$ による断面は台形

BD と $x = 2-3t$ の交点は. BD を $s:1-s$ に内分する点の $x$ 座標が $2-3t$ であるとして.

$\begin{pmatrix}0\\0\\2s\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1+s\\1-s\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+s\\1-s\\2s\end{pmatrix}$  $-1+s = 2-3t$  $s = 3-3t$  よって交点は $\begin{pmatrix}2-3t\\3t-2\\6-6t\end{pmatrix}$

CD との交点も同様 $(2-2t,\ 2-2t,\ 6-4t)$

台形の面積は右図より




$f(t) = (2t + 6t - 4)(4-4t)\frac{1}{2} = -16t^2+24t-8 = -16\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+1$

$t = \frac{3}{4}$ のとき 最大で 1

以上より **S=1,** このとき $\boldsymbol{t = \frac{3}{4}}$ $\left(このとき\ x = -\frac{1}{4}\right)$

(2) $V = \int_{-\frac{1}{4}}^{0} f(t)\,dx + \int_{0}^{2} f(t)\,dx$  $x = 2-3t$ より $\frac{dx}{dt} = -3$.

$= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{2}{3}} 16t^2+24t-8\,(-3)\,dt + \int_{\frac{2}{3}}^{0} 2t^2(-3)\,dt$

$= \left[-16t^3 - 36t^2 + 24t\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{2}{3}} + 9\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{2}{3}} = -16\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 36\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right) + 16\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 36\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 24\frac{3}{4} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$= \boldsymbol{\frac{5}{6}}$