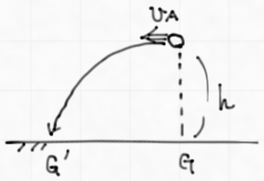
東京大2021

1 I (ア) $-mgl\cos\theta_0$ 　 (イ) $-mgl\cos\theta + \frac{1}{2}mu^2$

(ウ) $-mgl\cos\theta_0 = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}mu^2$ より $u = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

II (1) 運動量保存 　 $(m_A+m_B)v_0 = m_A v_A + m_B \times 0$ より $v_A = \frac{m_A+m_B}{m_A}v_0$



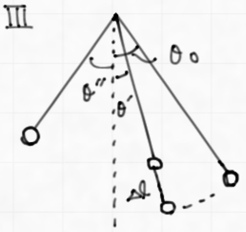
時刻 t=0 で飛びおり t_1 で G' に達したとき

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2}g t_1^2 \\ GG' = v_A t_1 \end{cases}$$

$$GG' = v_A \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{m_A+m_B}{m_A}\sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2(m_A+m_B)}{m_A}\sqrt{lh(1-\cos\theta_0)}$$

$$= 4\sqrt{2\times 0.3 \times (1-0.85)} = 4\times 0.3 = 1.2 \quad (m)$$

III



(1) $\frac{1}{2}mv'^2 - mg(l-\Delta l)\cos\theta' = -mg(l-\Delta l)\cos\theta''$

$\frac{1}{2}v'^2 - g(l-\Delta l)(1-\frac{\theta'^2}{2}) = -g(l-\Delta l)(1-\frac{\theta''^2}{2})$

$\cancel{1} - \frac{\theta'^2}{\cancel{2}} - \frac{v'^2}{\cancel{2}g(l-\Delta l)} = \cancel{1} - \frac{\theta''^2}{\cancel{2}}$

$\theta''^2 = \theta'^2 + \frac{v'^2}{g(l-\Delta l)}$

(2) I(ウ)より 直前の速さは $v = \sqrt{2gl(\cos\theta' - \cos\theta_0)}$

$\frac{1}{2}(l-\Delta l)v' = \frac{1}{2}lv$ より $v' = \frac{l}{l-\Delta l}v$ を(1)に代入

$\theta''^2 = \theta'^2 + \frac{1}{g(l-\Delta l)} \times \left\{\frac{l}{(l-\Delta l)}\sqrt{2gl(\cos\theta' - \cos\theta_0)}\right\}^2$

$= \theta'^2 + \frac{l^2}{\cancel{g}(l-\Delta l)^3} \times \cancel{2g}l(\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\theta_0^2 - \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\theta'^2)$

$= \theta'^2 + (\frac{l}{l-\Delta l})^3(\theta_0^2 - \theta'^2)$

(3) (2)の結果から θ'^2の係数は $1-(\frac{l}{l-\Delta l})^3$ で、これは負の値.
したがって θ'^2が小さいほど θ''は大きくなるので $\theta'=0$のとき θ''は最大.

その値は $\theta'' = \frac{l\theta_0}{l-\Delta l}\sqrt{\frac{l}{l-\Delta l}}$

(4) (3)より $\theta_n = (\frac{l}{l-\Delta l})^{\frac{3}{2}}\theta_{n-1} = (\frac{l}{l-\Delta l})^3\theta_{n-2} = \cdots = (\frac{l}{l-\Delta l})^{\frac{3}{2}n}\theta_0 = (\frac{l}{l-\Delta l})^{\frac{3}{2}n}\theta_0$

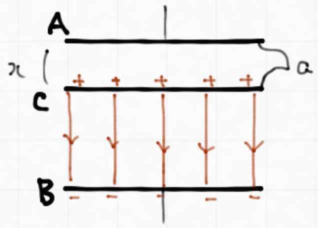
(5) 数値を代入

$\theta_n = (\frac{l}{l-0.1l})^{\frac{3}{2}n}\theta_0 = (\frac{10}{9})^{\frac{3}{2}n}\theta_0$

n=Nのとき $\theta_N \geqq 2\theta_0$ となるので 　 $(\frac{10}{9})^{\frac{3}{2}N}\cancel{\theta_0} \geqq 2\cancel{\theta_0}$

常用対数をとる 　 $\frac{3}{2}N(\log_{10}\frac{1}{0.9}) \geqq \log_{10}2$ 　 $N \geqq \frac{0.30\times 2}{0.046\times 3} = 4.3\cdots$ 　 **N=5**

2



Ⅰ (1) $C_0 = \varepsilon \frac{S}{d}$

(2) AC間は直結しているため電荷はたまらない（電圧は0）

したがって コンデンサーの容量（これを C_1 とする）は

$C_1 = \varepsilon \frac{S}{d-x}$ であり，静電エネルギー U_1 は

$$U_1 = \frac{1}{2}C_1V^2 = \frac{\varepsilon S V^2}{2(d-x)}$$

(3) コンデンサーの容量は $\varepsilon \frac{S}{d-\frac{1}{4}d} = \frac{4}{3}C_0$ に変わるので電荷は $C_1V \to \frac{4}{3}C_0V$ に変わる．

電池のした仕事 $W_0 = (\frac{4}{3}C_0V - C_1V) \times V$

コンデンサーのエネルギーの変化量 $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}C_0V^2 - \frac{1}{2}C_1V^2$ （$=\Delta U$ とする）

エネルギーと仕事の関係より

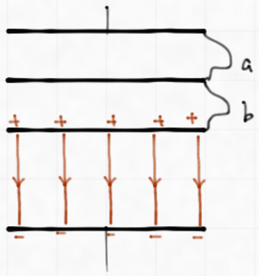
$$\Delta U = W_0 + W$$

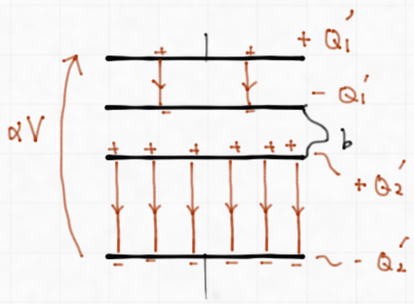
以上より $W = \Delta U - W_0 = (\frac{4}{3}C_0 - C_1)\times\frac{1}{2}V^2 - (\frac{4}{3}C_0 - C_1)V^2 = -\frac{1}{2}(\frac{4}{3}C_0 - C_1)V^2$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{4\varepsilon S}{3d} - \frac{\varepsilon S}{(d-x)}\right)V^2 = \frac{\varepsilon S}{2}\left(\frac{1}{d-x} - \frac{4}{3d}\right)V^2$$

また $\frac{W}{W_0} = -\frac{1}{2}$ $\therefore$ $-\frac{1}{2}$倍

Ⅱ





(1) a.bともにつながっているときは左のようになっている

aをはずしても，（他に変化はないので）電荷はそのまま保たれる．

$$Q_1 = 0 \qquad -Q_2 = -\varepsilon\frac{S}{\frac{1}{2}d}V = -2C_0V$$

3 0 イ 2

(2) $\begin{cases} -Q_1' + Q_2' = Q_2 \ (= 2C_0V) & \cdots ① \\ \frac{Q_1'}{4C_0} + \frac{Q_2'}{2C_0} = \alpha V & \Leftrightarrow \ Q_1' + 2Q_2' = 4\alpha C_0V \ \cdots ② \end{cases}$

①+② $3Q_2' = 2C_0V(1+2\alpha)$ $\qquad Q_2' = \frac{2}{3}(1+2\alpha)C_0V$

$Q_1' = \frac{4}{3}(\alpha-1)C_0V$

$$V_1 = \frac{Q_1'}{4C_0} = \frac{\alpha-1}{3}V \qquad V_2 = \frac{Q_2'}{2C_0} = \frac{2\alpha+1}{3}V$$

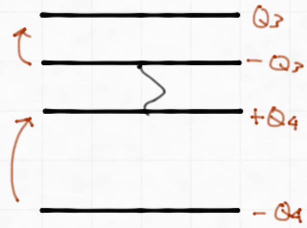
Ⅲ (1) ABCDの合成容量は $\frac{1}{4C_0} + \frac{1}{2C_0} = \frac{3}{4C_0}$ $\qquad \frac{4}{3}C_0$

振動回路の周期の公式より $T = 2\pi\sqrt{L\cdot\frac{4}{3}C_0} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}\sqrt{LC_0}$

(2) $t=0$のとき，コンデンサーの電荷は直流電源と同じで $2V$

$$2V = L\frac{\Delta I}{\Delta t}\bigg|_{t=0} = I_0L\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi\times0}{T}\right) = \frac{2\pi I_0 L}{T} \qquad \therefore I_0 = \frac{VT}{\pi L}$$

(3) $t=\frac{T}{4}$ のとき $L\frac{\Delta I}{\Delta t}\Big|_{t=\frac{T}{4}} = I_0 L\frac{2\pi}{T}\cos\frac{\pi}{2} = 0$ だから



$$\frac{Q_3}{4C_0}+\frac{Q_4}{2C_0}=0 \quad\Leftrightarrow\quad Q_3=-2Q_4$$

$\alpha=2$ のとき

$Q_1=\frac{4}{3}C_0V$ ， $Q_2=\frac{10}{3}C_0V$

したがって $Q_3=0$ のとき、$Q_4=-Q_1+Q_2=2C_0V$ 　コンデンサー ABCD にかかる電圧は、

$$\frac{0}{4C_0}+\frac{2C_0V}{2C_0}=V \qquad V=L\frac{\Delta I}{\Delta t}\Big|_{t=t'}=\cancel{L}\frac{V\cancel{T}}{\cancel{2\pi L}}\cdot\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{T}}\cos\frac{2\pi t'}{T} \qquad \cos\frac{2\pi t'}{T}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi}{T}t'=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi \qquad t'=\frac{1}{6}T,\ \frac{5}{6}T$$

(4) $-Q_3+Q_4=-Q_1+Q_2=2C_0V_0$ と (3) より $Q_4=\frac{2}{3}C_0V_0$ ， $Q_3=-\frac{4}{3}C_0V_0$

$$E_1=\frac{\left(\frac{4}{3}C_0V\right)^2}{2\cdot 4C_0}+\frac{\left(\frac{10}{3}C_0V\right)^2}{2\cdot 2C_0}=3C_0V^2$$

$$E_2=\frac{\left(-\frac{4}{3}C_0V\right)^2}{2\cdot 4C_0}+\frac{\left(\frac{2}{3}C_0V\right)^2}{2\cdot 2C_0}=\frac{1}{3}C_0V^2$$

このとき コイルにかかる電圧は 0 $\left(\frac{\Delta I}{\Delta t}=0\right)$ で 電流は最大となっているので

$$\Delta E+\frac{1}{2}LI_0^2=0 \qquad \Delta E=-\frac{1}{2}LI_0^2$$

(5) $Q_3-Q_4=Q_1'-Q_2'=-2C_0V$ で一定値となる。

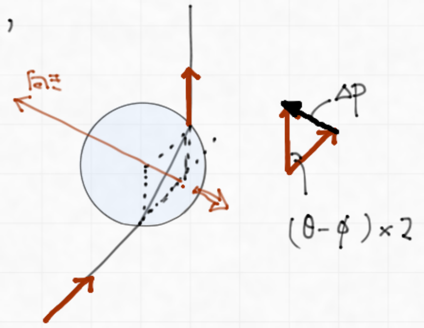
また $t=0$ で $Q_3=Q_1'=\frac{4}{3}(\alpha-1)C_0V$ で このとき Q_3 は最大 … ④

3

I (1) $\dfrac{\sin\theta}{\sin\phi} = \dfrac{n}{1}$ 　　$\sin\theta = n\sin\phi$

(2) 単位時間あたりの運動量 p は $p = \dfrac{Q}{c}$ だから $p\Delta t = \dfrac{Q}{c}\Delta t$

(3)



$\Delta P = p\sin(\theta-\phi) \times 2 = 2p\sin(\theta-\phi)$

光の運動量の変化の向きは C→O. 微粒子の運動量は
その逆向きの変化を受ける　　O→C

(4) $p = \dfrac{Q}{c}$ を (3) の結果に代入して

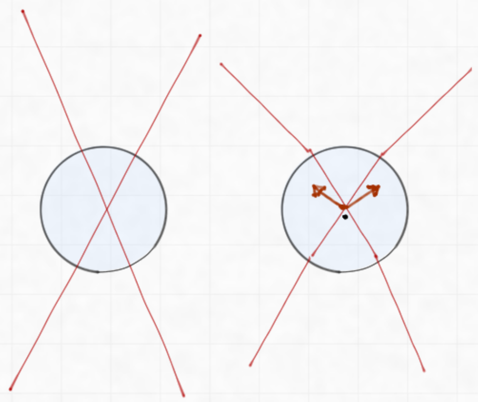
$$f = 2\frac{Q}{c}\sin(\theta-\phi) = \frac{2Q\sin(\theta-\phi)}{c}$$

(5) $\sin(\theta-\phi) = \sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi \fallingdotseq \theta-\phi$

$\sin\phi \fallingdotseq \phi = \dfrac{d}{r}$, $\sin\theta = n\sin\phi = \dfrac{nd}{r}$ だから

$$f = \frac{2Q}{c}\left(\frac{nd}{r} - \frac{d}{r}\right) = \frac{2Qd(n-1)}{cr}$$

II



(1) 力は働かない

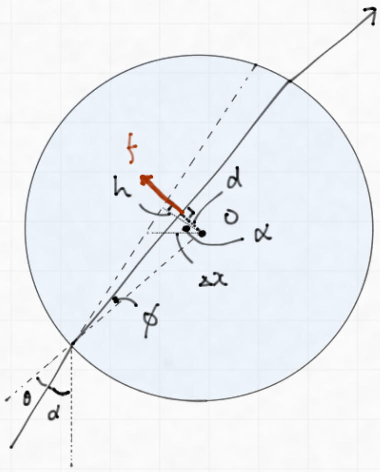
(2) 上

(3) OF が大きくなると I (5) の d が大きくなるため.
f は大きくなり, f′ は大きくなる　イ

III (1) $h = \Delta x\cos\alpha$

$\sin\theta = \dfrac{h}{r} = n\sin\phi$ 　　$\sin\phi = \dfrac{h}{nr}$

$d = r\sin\phi = \dfrac{h}{n} = \dfrac{\Delta x\cos\alpha}{n}$



(2) 左図の f の水平成分 ×2

$$f' = f\cos\alpha \times 2 = 2\cos\alpha \times \frac{2Qd(n-1)}{cr}$$

$$= \frac{4\cos\alpha\, Q(n-1)}{cr} \times \frac{\Delta x\cos\alpha}{n} = \frac{4\cos^2\alpha(n-1)Q\Delta x}{ncr}$$

(3) f_0 と f' は同じ大きさだから f' の式に数値を代入して

$$f' = f_0 = \frac{4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(1.5-1)\,5\times10^{-3}\times10^{-6}}{1.5\times3\times10^{8}\times10^{-5}} = 1\times10^{-12}\ (\mathrm{N})$$