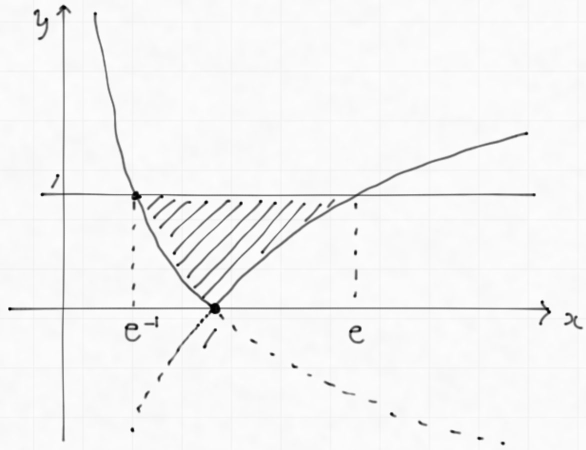
兵庫県立大2021

1

$$y=\left|\log x\right|=\begin{cases}\log x & (x\geqq 1)\\ -\log x & (0<x<1)\end{cases}$$



$\log x=1$ となるのは $x=e$

$-\log x=1$ となるのは $x=e^{-1}$

したがって もとめる図形の面積を S として

$$S=\int_{e^{-1}}^{1}1-(-\log x)\,dx+\int_{1}^{e}1-\log x\,dx$$

$$=\left[\cancel{x}+x\log x-\cancel{x}\right]_{e^{-1}}^{1}+\left[x-x\log x+x\right]_{1}^{e}$$

$$=1\cdot 0-\frac{1}{e}\cdot(-1)+2e-e\cdot 1-2+1\cdot 0=\frac{1}{e}+e-2$$

兵庫県立大2021

2

(1) $\int (x^2+2)\sin x\,dx = -(x^2+2)\cos x + \int 2x\cos x\,dx$

$= -(x^2+2)\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,dx\right)$

$= -(x^2+2)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$ （Cは積分定数）

$= \mathbf{2x\sin x - x^2\cos x + C}$ （Cは積分定数）

(2) $\int_0^{n\pi} |(x^2+2)\sin x|\,dx$

$= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |(x^2+2)\sin x|\,dx = \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (x^2+2)\sin x\,dx\right|$

$= \sum_{k=1}^{n} \left|\left[2x\sin x - x^2\cos x\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|-k^2\pi^2\cos k\pi + (k-1)^2\pi^2\cos(k-1)\pi\right|$

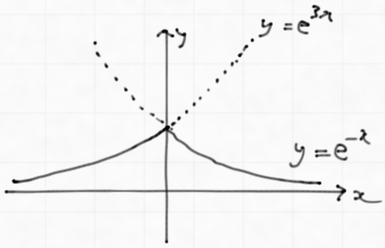
$= \sum_{k=1}^{n} \left|-k^2\pi^2(-1)^k + (k-1)^2\pi^2(-1)^{k-1}\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|(-1)^{k-1}\pi^2\left\{k^2+(k-1)^2\right\}\right|$

$= \sum_{k=1}^{n} \pi^2\left\{k^2+(k-1)^2\right\} = \pi^2\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1) = \pi^2\left\{\frac{2}{6}n(n+1)(2n+1) - n(n+1) + n\right\}$

$= \frac{1}{3}\pi^2 n\left(2n^2 + \cancel{3n} + 1 - \cancel{3n} - \cancel{3} + \cancel{3}\right) = \mathbf{\frac{\pi^2}{3}n(2n^2+1)}$

兵庫県立大2021

3 (1) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x \geqq 0) \\ e^{3x} & (x < 0) \end{cases}$ だから $f(x)$ のグラフは右のようになる



したがって $g(x)$ は

(i) $x \leqq 0$ のとき

$$g(x) = \int_{x-1}^{x} e^{3t}\,dt = \left[\frac{1}{3}e^{3t}\right]_{x-1}^{x} = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3(x-1)} = \frac{1}{3}e^{3(x-1)}(e^{3}-1)$$

(ii) $0 < x < 1$ のとき.

$$g(x) = \int_{x-1}^{0} e^{3t}\,dt + \int_{0}^{x} e^{-t}\,dt = \left[\frac{1}{3}e^{3t}\right]_{x-1}^{0} + \left[-e^{-t}\right]_{0}^{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{3(x-1)} - e^{-x} + 1$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-x}(e^{4x-3}+3) + \frac{4}{3}$$

(iii) $x \geqq 1$ のとき

$$g(x) = \int_{x-1}^{x} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_{x-1}^{x} = -e^{-x} + e^{-x+1} = e^{-x}(e-1)$$

(i)(ii)(iii)より

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(e^{3}-1)e^{3(x-1)} & (x \leqq 0) \\ -\frac{1}{3}e^{-x}(e^{4x-3}+3) + \frac{4}{3} & (0 < x < 1) \\ (e-1)e^{-x} & (x \geqq 1) \end{cases}$$

(2) (i) $x \leqq 0$ のとき $g'(x) = \cancel{\frac{1}{3}}(e^{3}-1) \times \cancel{3}e^{-3(x-1)} = (e^{3}-1)e^{-3(x-1)} > 0$

したがって $g(x)$ は $x \leqq 0$ で単調に増加するので この範囲での最大値は $x=0$ のとき $g(0) = \frac{1}{3}(1-e^{-3})$

(ii) $0 < x < 1$ のとき. $g'(x) = -e^{3(x-1)} + e^{-x} = e^{-x}(1 - e^{4x-3})$

$g'(x) = 0$ となるのは $e^{4x-3} = 1$ すなわち $x = \frac{3}{4}$ のときで この範囲の $g(x)$ の増減は次のようになる

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$g'(x)$	/	$+$	0	$-$	/
$g(x)$	/	↗	$\frac{4}{3}$	↘	/

$$g\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{4}}(1-3) + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}e^{-\frac{3}{4}}$$

よってこの範囲での $g(x)$ の最大値は. $x = \frac{3}{4}$ のときで $\frac{4}{3}(1-e^{-\frac{3}{4}})$

(iii) $x \geqq 1$ のとき. $g'(x) = -(e-1)e^{-x} < 0$

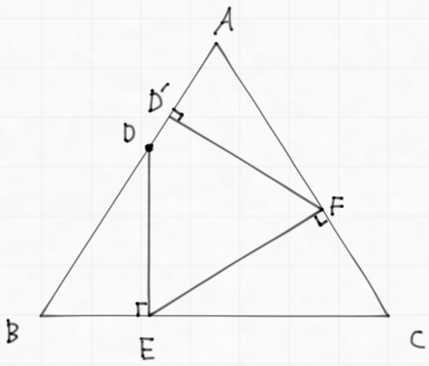
$g(x)$ は単調に減少し. 最大となるのは $x=1$ のとき. $g(1) = (e-1)e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$

以上より.

$\frac{1}{3}(1-e^{-3}) < \frac{1}{3} < \frac{4}{3} > 1 - \frac{1}{e}$ だから. $g(x)$ の最大値は $\frac{4}{3}(1-e^{-\frac{3}{4}})$

兵庫県立大2021

4



(1) $AD = x$ とおくと　DはAB上にあるので　$0 < x < 1$

$\triangle BDE$は$\angle E = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$の直角三角形だから

$$BE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}(1-x)$$

同様に$\triangle ECF$を考えて

$$CF = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}(1-BE) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}(x+1)$$

同様に$\triangle FAD'$を考えて

$$AD' = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}(1-CF) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}(x+1) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8}x$$

$0 < x < 1$だから

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\times 1 = \frac{1}{4} < AD' < \frac{3}{8} - 0$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{4} < AD' < \frac{3}{8}}$$

(2) $AD = AD'$となるときを考える.

$$x = \frac{3}{8} - \frac{1}{8}x \qquad x = \frac{1}{3}$$

$$AD = AD' = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

兵庫県立大2021

5 (1) s, t を解に持つ2次方程式の1つは $X^2-(s+t)X+st=0$

ここに $s+t=x$, $st=y$ を代入　$X^2-xX+y=0$.

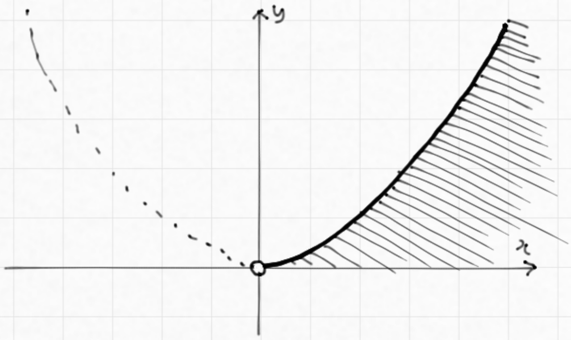
これが正の実数解を2つ(または1つの重解)持つのは、判別式をDとして

$$\begin{cases} D=x^2-4y \geqq 0. \\ s+t=x>0 \\ st=y>0 \end{cases} \iff y \leqq \frac{1}{4}x^2,\ x>0,\ y>0$$

上の不等式の表す領域は

右図斜線部

(境界について、太線のみ含む)



(2) $s+t=x$, $st=y$ とすると

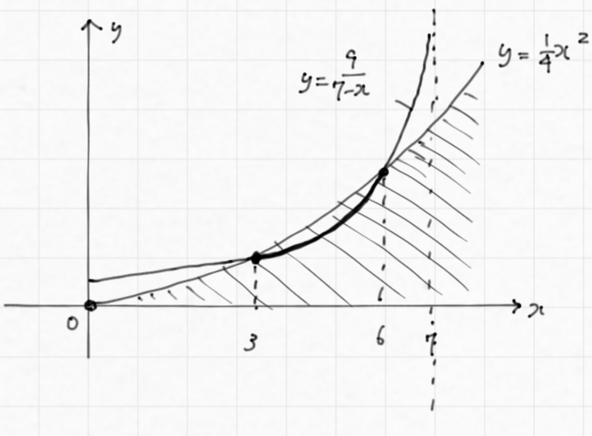
$x+u=7$,　$yu=9$

uを消去して.　$y(7-x)=9$

$x=7$のとき上式は成立しないので　$y=\dfrac{9}{7-x}$

(1)より. x, y は (1)の領域内の点だから $y=\dfrac{9}{7-x}$ と(1)のグラフは書きこむ

$\dfrac{1}{4}x^2=\dfrac{9}{7-x} \iff x^3-7x^2+36=0 \iff (x+2)(x-3)(x-6)=0$ だから. グラフは左下のようになる



したがって　$3 \leqq x \leqq 6$

$3 \leqq 7-u \leqq 6$

$1 \leqq u \leqq 4$

これは u が正の実数であることを満たしているので u の値の範囲は　$\boldsymbol{1 \leqq u \leqq 4}$

u の最大値は 4.　このとき. $x=3$, $y=\frac{1}{4}\cdot 3^2=\frac{9}{4}$

(1)より. s, t は

$X^2-3X+\frac{9}{4}=0$ の解であり.

$(X-\frac{3}{2})^2=0$ となるので　$\boldsymbol{s=t=\frac{3}{2}}$