大阪大学2021

1 (1) $\frac{1}{x} = f(x)$ とおく

$f'(x) = -x^{-2}$

Qにおける接線は　$y = -\frac{1}{s^2}(x-s) + \frac{1}{s} \iff y = -\frac{1}{s^2}x + \frac{2}{s}$

P における接線も同様　$y = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}$

2本の接線の式を連立　$-\frac{1}{s^2}x + \frac{2}{s} = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t} \iff x = \frac{2ts}{s+t} = a$ …①

$$y = -\frac{1}{s^{\cancel{2}}}\cdot\frac{2t\cancel{s}}{s+t} + \frac{2}{s} = \frac{\cancel{-2t} + 2s + \cancel{2t}}{\cancel{s}(s+t)} = \frac{2}{s+t} = b \quad \cdots ②$$

①②を連立　$a = bts$　$st = \frac{a}{b}$,　$s+t = \frac{2}{b}$

よってs, tを解に持つ2次方程式の1つは　$bX^2 - 2X + a = 0$.

これを解くと　$X = \frac{1 \pm \sqrt{1-ab}}{b}$　　$s<t$ だから　$s = \frac{1-\sqrt{1-ab}}{b}$　$t = \frac{1+\sqrt{1-ab}}{b}$

(2) Pは $y = \frac{9}{4} - 3x^2$ 上にある　$b = \frac{9}{4} - 3a^2$,　$a>0$, $b>0$

$$\frac{t}{s} = \frac{1+\sqrt{1-ab}}{1-\sqrt{1-ab}}$$

ここで　$1-ab = 1 - a\cdot\left(\frac{9}{4} - 3a^2\right) = 3a^3 - \frac{9}{4}a + 1 = g(a)$ とおく.

$b = \frac{9}{4} - 3a^2 > 0$ より　$a < \frac{\sqrt{3}}{2}$　よって　aの範囲は $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$g'(a) = 9a^2 - \frac{9}{4}$　　$g'(a) = 0$ となるのは $a^2 = \frac{1}{4}$　$a = \frac{1}{2}$ のとき.

g(a)の増減は

a	0	…	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘		↗	

$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$,　$g(0) = 1$,　$g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1$

$$\frac{1}{4} \leqq g(a) = 1 - ab < 1$$

$1-ab = u$ とおくと　$\frac{1}{4} \leqq u < 1$

$$\frac{t}{s} = \frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}} = h(u) \text{ とおく.}$$

$$h'(u) = \frac{\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-\sqrt{u}) - (1+\sqrt{u})\times\left(-\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)}{(1-\sqrt{u})^2} = \frac{1}{(1-\sqrt{u})^2\sqrt{u}} > 0.$$

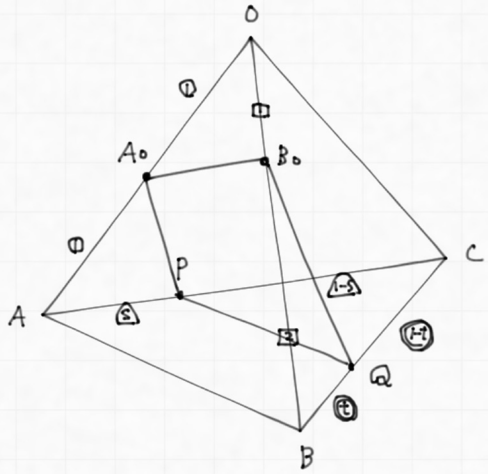
よって h(u) は単調に増加し, $u = \frac{1}{4}$ のとき最小値 $\frac{1+\sqrt{\frac{1}{4}}}{1-\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$ をとる.

また, このとき. $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{9}{4} - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\frac{t}{s}$ の最小値 **3**　そのときの a, b は　$a = \mathbf{\frac{1}{2}}$, $b = \mathbf{\frac{3}{2}}$

大阪大学2021

2　$\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ と表す



(1)　条件より

$\vec{OA_0}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{OB_0}=\frac{1}{3}\vec{b}$, $\vec{OP}=(1-s)\vec{a}+s\vec{c}$

$\vec{OQ}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

A_0, B_0, P, Q が同一平面にあるので、$\vec{A_0Q}$ を $\vec{A_0B_0}$ と $\vec{A_0P}$ で表すことができる

$$\vec{A_0Q}=\alpha\vec{A_0B_0}+\beta\vec{A_0P}$$

$$\vec{OQ}-\vec{OA_0}=\alpha(\vec{OB_0}-\vec{OA_0})+\beta(\vec{OP}-\vec{OA_0})$$

$$(1-t)\vec{b}+t\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}=\alpha\left(\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)+\beta\left((1-s)\vec{a}+s\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}=\left(\beta-\beta s-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)\vec{a}+\frac{1}{3}\alpha\vec{b}+s\beta\vec{c}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は互いに1次独立だから、

$$-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\beta-\beta s-\frac{1}{2}\alpha \quad かつ、\quad 1-t=\frac{1}{3}\alpha \quad かつ \quad t=s\beta$$

α, β を消去して

$$-\frac{1}{2}=\frac{t}{2s}-t-\frac{1}{2}(3-3t)$$

これを整理して　$t=\mathbf{\frac{2s}{1+s}}$

(2)　与えられた数値より

$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$,　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot2\cdot\cos120^\circ=-1$　$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$,　$\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot1\cdot\cos60^\circ=1$

$\angle POQ=90^\circ$ だから

$$\vec{OP}\cdot\vec{OQ}=0$$

ここに (1) の $\vec{OP}$ と $\vec{OQ}$ の式を代入

$$\{(1-s)\vec{a}+s\vec{c}\}\cdot\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}=0$$

$$-(1-s)(1-t)+t(1-s)+0+st\times2^2=0$$

$$2st+2t+s-1=0$$

ここに $t=\frac{2s}{1+s}$ を代入　$5s-1=0$　　$s=\frac{1}{5}$, $t=\frac{\frac{2}{5}}{1+\frac{1}{5}}=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ \mathbf{s=\frac{1}{5}}$$

大阪大学2021

3

(1) $f(x)=\log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)$ とおく.

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{t}=\frac{t-x}{xt}\leqq 0$ $f(x)$は単調減少 $f(t)=0$だから

$t\leqq x$ のとき $f(x)\leqq f(t)=0$ $\therefore$ $t\leqq x$のとき $\log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)\leqq 0$ が成り立つ

$g(x)=f(x)+\frac{(x-t)^2}{2}$ とおく.

$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{t}+x-t=\frac{t-x}{xt}+(x-t)=(x-t)\frac{tx-1}{tx}$

$g'(x)=0$ となるのは $x=t,\ \frac{1}{t}$

$t\geqq 1$だから $\frac{1}{t}\leqq 1$となるので $x\geqq t$において $g'(x)$は単調に増加する

また $g(t)=0$ だから $x\geqq t$ で $g(x)\geqq 0$

よって $x\geqq t$のとき $g(x)\geqq 0$ すなわち $-\frac{(x-t)^2}{2}\leqq\log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)$ が成立している.

(2) (1)の不等式を $t\leqq x\leqq t+\frac{1}{n}$ の区間で積分する.

$$\int_t^{t+\frac{1}{n}}-\frac{(x-t)^2}{2}dx\leqq\int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)\,dx\leqq 0$$

$$\left[-\frac{1}{6}(x-t)^3\right]_t^{t+\frac{1}{n}}\leqq\int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x\,dx-\left[\log t\cdot x+\frac{1}{2t}x^2-x\right]_t^{t+\frac{1}{n}}\leqq 0$$

$$-\frac{1}{6}\times\frac{1}{n^3}-0\leqq\int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x\,dx-\left(t+\frac{1}{n}\right)\log t-\frac{1}{2t}\left(t+\frac{1}{n}\right)^2+t+\frac{1}{n}+t\log t+\frac{1}{2}t-t\leqq 0$$

$$-\frac{1}{6n^3}\leqq\int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x\,dx-\frac{1}{n}\log t-\frac{1}{2t}\left(\cancel{t^2}+\frac{2}{n}t+\frac{1}{n^2}-\cancel{t^2}\right)+\frac{1}{n}\leqq 0$$

$$-\frac{1}{6n^3}\leqq\int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x\,dx-\frac{1}{n}\log t-\frac{1}{2tn^2}\leqq 0$$

証明終

大阪大学2021

3 つづき

(3) (2)で $t=1$ とする $\displaystyle -\frac{1}{6n^3} \leqq \int_1^{1+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log 1 - \frac{1}{2\cdot 1\cdot n^2} \leqq 0$

$t=1+\frac{1}{n}$ $\displaystyle -\frac{1}{6n^3} \leqq \int_{1+\frac{1}{n}}^{1+\frac{2}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)n^2} \leqq 0$

$t=1+\frac{2}{n}$ $\displaystyle -\frac{1}{6n^3} \leqq \int_{1+\frac{2}{n}}^{1+\frac{3}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)n^2} \leqq 0$

⋮

$t=1+\frac{n-1}{n}$ $\displaystyle -\frac{1}{6n^3} \leqq \int_{1+\frac{n-1}{n}}^{2} \log x\,dx - \frac{1}{n}\left(1+\frac{n-1}{n}\right) - \frac{1}{2\left(1+\frac{n-1}{n}\right)n^2} \leqq 0$

$$-\frac{n}{6n^3} \leqq \int_1^2 \log x\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq 0$$

n倍 $\displaystyle -\frac{1}{6n} \leqq n\int_1^2 \log x\,dx - a_n - \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq 0$

ここで $\displaystyle \int_1^2 \log x\,dx = \left[x\log x - x\right]_1^2 = 2\log 2 - 2 + 1 = 2\log 2 - 1$ だから

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \frac{1}{6n} \leqq n\left(2\log 2 - 1\right) - a_n \leqq \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)} \leqq a_n - (2\log 2 - 1)n \leqq \frac{1}{6n} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)} = -\int_0^1 \frac{1}{2(1+x)}\,dx = -\left[\frac{1}{2}\log|x+1|\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\log 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{6n} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right\} = -\frac{1}{2}\log 2$$

よって はさみうちの原理より $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left\{a_n - (2\log 2 - 1)n\right\} = -\frac{1}{2}\log 2$

よって $p = \mathbf{2\log 2 - 1}$, $q = \mathbf{-\frac{1}{2}\log 2}$

(
pだけなら…

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \log(1+x)\,dx = \int_1^2 \log x\,dx = \left[x\log x - x\right]_1^2 = 2\log 2 - 2 + 1 = 2\log 2 - 1$$

$\displaystyle \lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$ が成りたつとき $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - pn}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n} - p\right) = 0$ となることから. $p = 2\log 2 - 1$

(2)の誘導がつかえず. q をもとめる方法が思いつきませんでした.
)

大阪大学2021

4 (1) $\int_a^c x^2+bx\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}bx^2\right]_a^c = \frac{1}{3}c^3+\frac{1}{2}bc^2-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}ba^2$

$\int_b^c x^2+ax\,dx = \frac{1}{3}c^3+\frac{1}{2}ac^2-\frac{1}{3}ba^2+\frac{1}{2}ab^2$

よって(＊)は　$\frac{1}{2}bc^2-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}ba^2 = \frac{1}{2}ac^2-\frac{1}{3}ba^2+\frac{1}{2}ab^2$

整理して　$3(b-a)c^2+2(b-a)(a^2+ab+b^2)+3ab(b-a)=0$

$b \neq a$だから$b-a$で割る　$3c^2+2a^2+5ab+2b^2=0$

整理して　$3c^2=-(2a+b)(a+2b)$ …①

ここで、左辺は3の倍数だから右辺も3の倍数.

$2a+b$が3の倍数のとき.

$2a+b \equiv 0 \pmod 3$

2倍して　$4a+2b \equiv 0 \pmod 3$

$a+2b \equiv 0 \pmod 3$

これは右辺の$2a+b$, $a+2b$が、いずれも3の倍数となることを示しており右辺は9の倍数.

左辺が9の倍数となるのはcが3の倍数のときに限られるので、cは3の倍数.

同様に　$a+2b \equiv 0 \pmod 3$ のとき、2倍して　$2a+b\equiv 0$ となるので右辺はやはり9の倍数で、cは3の倍数となる

証明終

(2) ①より　$3\times 3600^2 = -(2a+b)(a+2b)$

$2^8\cdot 3^5\cdot 5^4 = -(2a+b)(a+2b)$ …②

$(2a+b)-(a+2b)=a-b<0$ だから　$2a+b<a+2b$.

②式左辺は正だから.　$2a+b<0<a+2b$ であることが必要.

逆に $2a+b<a+2b$ のとき必ず $a<b$

$2a+b = -2^p\cdot 3^q\cdot 5^r$ …③

$a+2b = 2^{8-p}\cdot 3^{5-q}\cdot 5^{4-r}$ …④

$\left(\begin{array}{ll} p=0,1,\cdots 8 & q=1,2,3,4 \ (\because 2a+b,\ a+2b\text{はいずれも3の倍数}) \\ r=0,1,2,3,4 & \end{array}\right)$

③×2−④　$3a = -2^{p+1}\cdot 3^q\cdot 5^r - 2^{4-p}\cdot 3^{3-q}\cdot 5^{2-r}$

$a = -2^{p+1}\cdot 3^{q-1}\cdot 5^r - 2^{4-p}\cdot 3^{2-q}\cdot 5^{2-r}$

よってaは必ず整数.

このとき③よりbも整数.

以上より、a, bの組み合わせは　pで9通り、qが4通り　rが5通りで　$9\times4\times5=180$通り

大阪大学2021

5 (1) $f(x)=x-\tan x$ とおく.

$f'(x)=1-\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}$

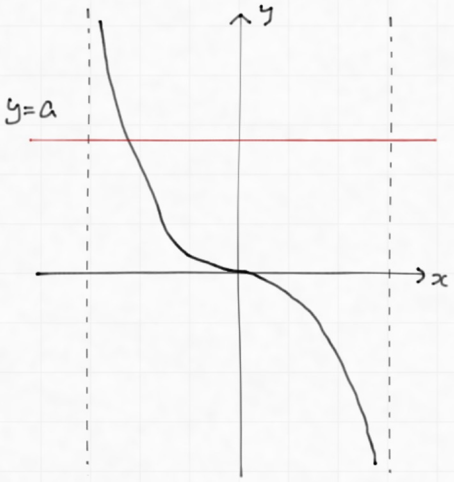
$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ のとき　$0<\cos x\leqq 1$ だから　$f'(x)\leqq 0$.

であり, $f(x)$ は単調に減少する.

よって $y=f(x)$ と $y=a$ のグラフは $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ で

唯1つの交点をもち, それは $f(x)=a$ が $|x|<\frac{\pi}{2}$ を

満たすものがちょうど1個あることを示している

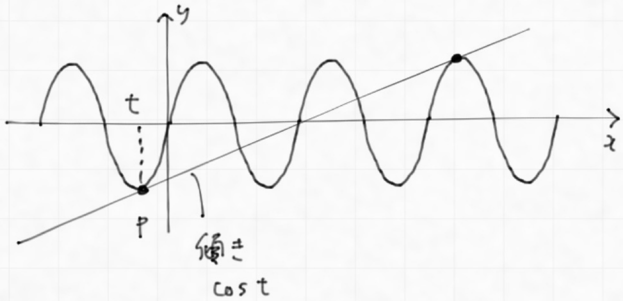


(2) (1)より $x-\tan x=n\pi$ を満たす x_n について

$1<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<0$

$0\leqq t<\frac{\pi}{2}$ のとき, 接線の傾きは正だから,

$x\geqq\frac{\pi}{2}$ の範囲で $y=\sin x$ に再び接することはない.



$-\frac{\pi}{2}<t<0$ とし, $y=\sin x$ の P における接線をもとめると

$y=\cos t\,(x-t)+\sin t$　…①

もう1つの接点を $Q(s,\sin s)$　$(s\geqq\frac{\pi}{2})$ とすると, この点における接線は.

$y=\cos s\,(x-s)+\sin s$　…②

① と ② が一致するとき

$\cos t=\cos s$　かつ　$-t\cos t+\sin t=-s\cos s+\sin s$.

$\cos t=\cos s$ より　$s=t+2m\pi,\ -t+2m\pi$　（m は自然数　$\because\ s\geqq\frac{\pi}{2}$）

$s=t+2m\pi$ のとき　$\sin s=\sin t$ となるので. P と Q の y 座標が等しくなるため, 上式は成立しない

$s=-t+2m\pi$ を $-t\cos t+\sin t=-s\cos s+\sin s$. に代入

$-t\cos t+\sin t=-(-t+2m\pi)\cos t+\sin(-t+2m\pi)$

$-t\cos t+\sin t=t\cos t-2m\pi\cos t-\sin t$

$2\sin t-2t\cos t=-2m\pi\cos t$

$2\tan t-2t=-2m\pi$

$t-\tan t=m\pi$

よって P における接線が C と $x\geqq\frac{\pi}{2}$ で接するための必要十分条件は, t が.

$t-\tan t=m\pi$　（m は自然数）, $|t|<\frac{\pi}{2}$

を満たすことである

よって t が $x_1, x_2, x_3\cdots$ のいずれかと等しいことが必要十分条件である.

証明終.