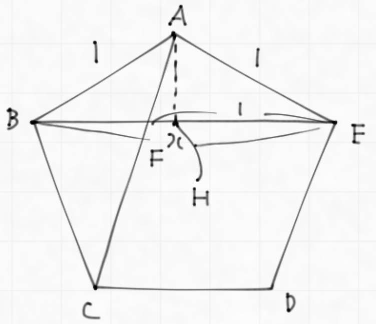
近畿大学2022 推薦

1

1



$\triangle ABE \sim \triangle FAB$ より

$$1 : x = x-1 : 1 \iff x^2 - x = 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2. 上図中 $\angle BAH = \frac{2\pi}{5}$　　$\angle ABH = \frac{1}{5}\pi$ だから　$\cos\angle ABH = \frac{\frac{x}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$$\cos\frac{2}{5}\pi = 2\cos^2\frac{1}{5}\pi - 1 = 2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

3. $$\sin\frac{1}{5}\pi = \sqrt{1-\cos^2\frac{1}{5}\pi} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \sqrt{1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{5}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{5}}$$

正五角形の面積 $S = \triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE$

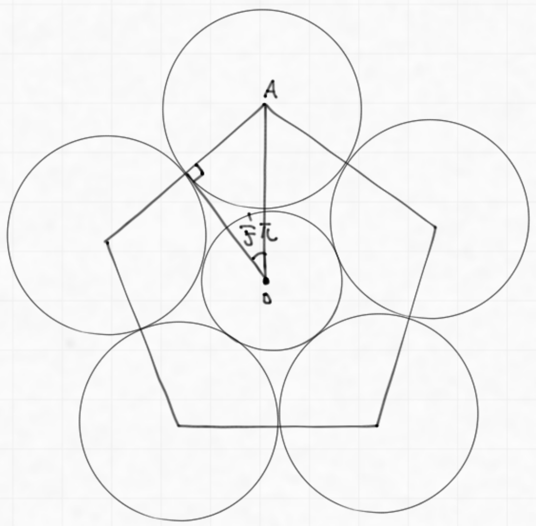
$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x\sin\frac{1}{5}\pi + \frac{1}{2}\cdot x\cdot x\sin\frac{1}{5}\pi + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x\cdot\sin\frac{1}{5}\pi$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{5}}\,(2x+x^2) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}+\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{5-\sqrt{5}}\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}\right) = \frac{1}{16}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,(5+3\sqrt{5})$$

（他に $\frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}$, $\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$ も同値）

4.



$$AO = \frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{5}\pi} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5-\sqrt{5}}$$

中心の円の半径 $= AO - \frac{1}{2}$

$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5-\sqrt{5}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,(5+\sqrt{5})}{20} - \frac{1}{2}$$

（他に $\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} - \frac{1}{2}$ も同値）

近畿大学2022 推薦

2.

1. 2つの部屋をn回選ぶ …2^n. いずれかの部屋に全員集まる…2

2^n-2

2. 0人の部屋があっても良いとすると…3^n

2つの部屋に集まるのは ${}_3C_2(2^n-2)$ 1つの部屋に集まるのは ${}_3C_1\cdot 1^n$

$3^n-{}_3C_2(2^n-2)-{}_3C_1\cdot 1^n = 3^n-3\cdot 2^n+3$

3. 2と同様. 3. 2. 1つの部屋に集まるときを除く.

$4^n-{}_4C_3(3^n-{}_3C_2(2^n-2)-{}_3C_1)-{}_4C_2(2^n-2)-{}_4C_1\cdot 1^n$

$= 4^n-4\cdot 3^n+12\cdot 2^n-6\cdot 2^n-12+12-4$

$= 4^n-4\cdot 3^n+6\cdot 2^n-4$

4. n人をk人で分ける分け方は

$k^n-{}_kC_1(k-1)^n+{}_kC_2(k-2)^n-{}_kC_3(k-3)^n+\cdots+(-1)^{k-1}{}_kC_{k-1}1^n$

$= \sum_{i=1}^{k} {}_kC_{i-1}(-1)^{i-1}(k-i+1)^n$

3

(1) 整式に $x=0$ を代入. $2f(2)-3f(1)+f(0)=6$

$2f(2)-3\times 0+6=6$ $\therefore f(2)=\mathbf{0}$

(2) $f(x)$を $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ とおく. ($a_n\neq 0$, $f(x)$はn次の多項式)

$$\text{左辺}=2a_n(x+2)^n+2a_{n-1}(x+2)^{n-1}+\cdots+2a_1(x+2)+2a_0$$
$$-3a_n(x+1)^n-3a_{n-1}(x+1)^{n-1}-\cdots-3a_1(x+1)-3a_0$$
$$+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$=4na_nx^{n-1}+\cdots+\cancel{2a_{n-1}x^{n-1}}-3n\cdot a_nx^{n-1}-\cdots-3\cancel{a_{n-1}x^{n-1}}-\cdots+\cancel{a_{n-1}x^{n-2}}+\cdots$$
$$=na_nx^{n-1}+\cdots$$

よって左辺の最高次の項は$n-1$次の項

右辺は2次式だから $n-1=2$ すなわち $n=3$

整式で $x=1$ とすると $2f(3)-3f(2)+f(1)=3+15+6$ $f(3)=12$.

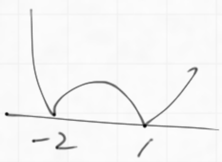
$f(x)$は3次式で $f(1)=f(2)=0$ より.

$$f(x)=(ax+b)(x-1)(x-2)$$

とおくことができる

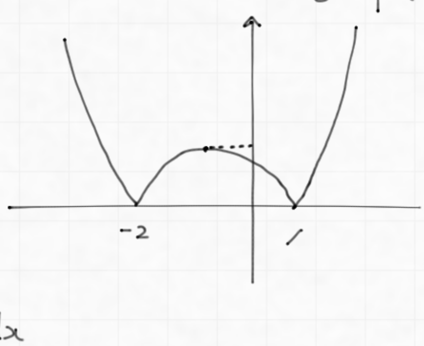
$f(0)=2b=6$ より $b=3$

$f(3)=(3a+3)(3-1)(3-2)=6(a+1)=12$ より $a=1$.



よって $\mathbf{f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)}$

(3) $f(x+1)-f(x)=x(x-1)(x+4)-(x-1)(x-2)(x+3)=3(x-1)(x+2)$



$$\int_0^1|3(x-1)(x+2)|dx=3\int_0^1-x^2-x+2\,dx$$
$$=3\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1=3\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)=\frac{7}{2}<17$$

したがって $a>1$ であり

$$\int_0^a|3(x-1)(x+2)|dx=\int_0^1-3(x-1)(x+2)dx+\int_1^a3(x-1)(x+2)dx$$
$$=7+3\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_0^a=7+a^3+\frac{3}{2}a^2-6a=17$$

$a^3+\frac{3}{2}a^2-6a-10=0 \iff \left(a-\frac{5}{2}\right)(a+2)^2=0$ $a=\mathbf{\frac{5}{2}}$