三重大学2021

1.

(1) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2^2+(-3)^2+1^2} = \sqrt{14}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 2 + 2(-3) + 3\cdot(-1) = -7$

$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ として　$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{-7}{\sqrt{14}^2} = -\dfrac{1}{2}$　$\therefore\ \theta = \mathbf{120^\circ}$

$\vec{a}$ および $\vec{b}$ と直交し、大きさが $\sqrt{3}$ のベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ と表す.

$|\vec{n}| = \sqrt{3}$ より　$a^2+b^2+c^2 = 3$ …①

$\vec{a}\cdot\vec{n} = 0$ より　$a+2b+3c = 0$ …②

$\vec{b}\cdot\vec{n} = 0$ より　$2a-3b-c = 0$ …③

② + ③×3 より　$7a - 7b = 0$　$a = b$.

これを②に代入して　$c = -b$

$a=b,\ c=-b$ を①に代入　$b^2 = 1$　$b = \pm 1$

$\therefore$ $\vec{n} = \mathbf{(\pm 1, \pm 1, \mp 1)}$ **複号同順**

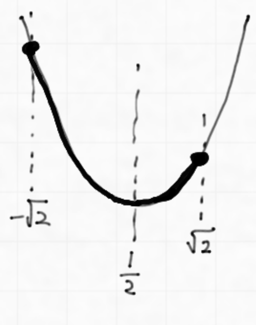
(2) $\sin x + \cos x = t$ とおく.

$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ だから　$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x$　$\Leftrightarrow$　$\sin 2x = t^2 - 1$

よって　$y = \sin 2x - \sin x - \cos x = t^2 - 1 - t$

$= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$　$(-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$



y が最大となるのは $t = -\sqrt{2}$ のとき　$y = (-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - 1 = \mathbf{\sqrt{2}+1}$

y が最小となるのは $t = \frac{1}{2}$ のとき.　$y = \mathbf{-\frac{5}{4}}$

(3) z の偏角を θ とすると　$z = \sqrt{3}(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\angle BAC$ が直角となるので　$z^3 - z$ と $z^2 - z$ のなす角は $\frac{\pi}{2}$ または $\frac{3}{2}\pi$.

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = \frac{\cancel{z}(z+1)\cancel{(z-1)}}{\cancel{z}\cancel{(z-1)}} = z + 1 = \sqrt{3}(\cos\theta + i\sin\theta) + 1$$

これが純虚数となればよいので　$\sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$　$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

このとき　$\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$　$\therefore\ z = -1 \pm \sqrt{2}i$

z の虚部は正なので　$z = \mathbf{-1 + \sqrt{2}i}$

三重大学 2021

1

(4) $\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right) \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\times 1} \times 2\sqrt{\frac{b}{c}\times 1} \times 2\sqrt{\frac{c}{a}\times 1}$

$$= 8\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{a}} = \mathbf{8}$$

等号は $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=1$ のときで、 $\mathbf{a=b=c}$ のとき.

(5) 赤玉　④ ⑧ ⑫ ‥‥ ⑳⓪　50個

白玉　1, 2, 3, ‥‥ 100　100個

(i) 100以下の赤玉を引いたとき.

$(4k)$ の玉を引いたとする $(1 \leqq k \leqq 25)$

このとき赤玉の数が白玉の数より大きくなるのは白球の数が $1\sim 4k-1$ のときで、

その組み合わせの総数は $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}(4k-1) = \frac{3+99}{2}\times 25 = 1275$ 通り

(ii) 100より大きい赤玉を引いたとき、

必ず赤玉の数が白玉の数を上回る.　$25\times 100 = 2500$ 通り.

(i)(ii)より、もとめる確率は $\dfrac{1275+2500}{50\times 100} = \dfrac{51+100}{200} = \mathbf{\dfrac{151}{200}}$

(別解)

赤玉

白玉	4	8	12	16	…	100	104	…	200	個数
1	○	○	○	○	○	○	○	○	○	50
2	○	○	○	○	○	○	○	○	○	50
3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	50
4		○	○	○	○	○	○	○	○	49
5		○	○	○	○	○	○	○	○	49
6		○	○	○	○	○	○	○	○	49
7		○	○	○	○	○	○	○	○	49
8			○	○	○	○	○	○	○	48
9			○	○	○	○	○	○	○	48
⋮					⋱	○	○	○	○	⋮
99						○	○	○	○	26
100							○	○	○	25
個数	3	7	11	15	…	99	100	100	100	

$3+7+11+\cdots+99+100\times 25$

$= 1275+2500$

$\therefore \dfrac{1275+2500}{50\times 100} = \mathbf{\dfrac{151}{200}}$

または、

$50\times 3+49\times 4+48\times 4+\cdots+26\times 4+25$

$=(26+27+\cdots+50)\times 4-50+25$

$=\dfrac{26+50}{2}\times 25\times 4-25 = 3800-25 = 3775$

以下同じ.

三重大学2021

2 (1) $t=0$ のとき　$b_{n+1}-b_n=0\cdot a_n=0$ だから　$b_{n+1}=b_n=b_{n-1}=\cdots=b_1$

また　$b_1=a_2-a_1=1-1=0$　よって　$b_n=0$

$\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ だから $a_{n+1}-a_n=0$ が成り立ち．　$a_{n+1}=a_n=\cdots=a_2=a_1=1$．

$\therefore$ $n\geqq 3$ のとき　$\boldsymbol{a_n=1}$

$t=1$ のとき．　$b_{n+1}-b_n=a_n$　…①

また $\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ だから　$a_{n+1}-a_n=b_n$　…②

② より　$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$，$b_n=a_{n+1}-a_n$ を ① に代入

$$a_{n+2}-a_{n+1}-a_{n+1}+\cancel{a_n}=\cancel{a_n} \quad (n\geqq 1)$$

$$a_{n+2}=2a_{n+1} \quad (n\geqq 1)$$

$$a_{n+1}=2a_n \quad (n\geqq 2)$$

$\{a_n\}$ は $n\geqq 2$ のとき公比 2 の等比数列となっているので

$$a_n=a_2\cdot 2^{n-2}=2^{n-2} \quad (n\geqq 2)$$

$\therefore$ $n\geqq 3$ のとき　$\boldsymbol{a_n=2^{n-2}}$

(2) 連立して x を消去する　$2y-(1-t)z-\alpha y=\beta y-\alpha\beta z$

$$(2-\alpha-\beta)y+(\alpha\beta-1+t)z=0$$

これが，y，z の値にかかわらず成り立つのは

$$\alpha+\beta=2，\ \alpha\beta=1-t$$

が成り立つときで，α，β を 2 解にもつ X についての 2次方程式が

$$X^2-2X+1-t=0$$

と表せるので　$X=1\pm\sqrt{1-1+t}=1\pm\sqrt{t}$　　$(\alpha,\beta)=\boldsymbol{(1\pm\sqrt{t},\ 1\mp\sqrt{t})}$

(3) 条件より　$b_{n+1}-b_n=ta_n$，$a_{n+1}-a_n=b_n$　(いずれも $n\geqq 1$)

b_n および b_{n+1} を消去して

$$a_{n+2}-a_{n+1}-a_{n+1}+a_n=ta_n \quad (n\geqq 1)$$

$$a_{n+2}-2a_{n+1}+(1-t)a_n \quad (n\geqq 1)$$

(2) より　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})=\beta^2(a_{n-1}-\alpha a_{n-2})=\cdots=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$$

よって　$a_{n+1}-(1+\sqrt{t})a_n=-\sqrt{t}(1-\sqrt{t})^{n-1}$

$a_{n+1}-(1-\sqrt{t})a_n=\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^{n-1}$

辺々引いて　$2\sqrt{t}\,a_n=\sqrt{t}\{(1+\sqrt{t})^{n-1}+(1-\sqrt{t})^{n-1}\}$　$\therefore$ $\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}\{(1+\sqrt{t})^{n-1}+(1-\sqrt{t})^{n-1}\}}$

三重大学2021

3

(1) $f=(2p-xy)\int_0^{p\pi}\cos\frac{t}{2p}dt+\int_0^1 te^t dt = (2p-xy)\left[2p\sin\frac{t}{2p}\right]_0^{p\pi}+\left[te^t\right]_0^1-\left[e^t\right]_0^1$

$=(2p-xy)\left(2p\sin\frac{\pi}{2}-2p\sin 0\right)+e-e+1 = 2p(2p-xy)+1$ 　　 $f=4p^2-2pxy+1$

(2) $u=px-y$ より $y=px-u$ を Cの式に代入

$p^2x^2+(px-u)^2-1=0 \iff 2p^2x^2-2upx+u^2-1=0 \cdots ①$

①はxについての2次方程式($\because p>0$)で、これが実数解を持つので、判別式をDとして.

$D/4=u^2p^2-2p^2(u^2-1)=-p^2u^2+2p^2\geqq 0$

$p>0$だから両辺をp^2で割って. $u^2\leqq 2 \iff -\sqrt2\leqq u\leqq\sqrt2$

$-\sqrt2\leqq u\leqq\sqrt2$ が成り立つとき. x,yは存在するので. もとめる条件は 　 $-\sqrt2\leqq u\leqq\sqrt2$

(3) $u^2=(px-y)^2=p^2x^2+y^2-2pxy=1-2pxy$ 　 ($\because p^2x^2+y^2=1$)

$2pxy=1-u^2$ を $\frac{u}{f}$ の式に代入

$\frac{u}{f}=\frac{u}{4p^2-2pxy+1}=\frac{u}{4p^2-1+u^2+1}=\frac{u}{u^2+4p^2}=g(u)$ とおく

$g'(u)=\frac{u^2+4p^2-u\times 2u}{(u^2+4p^2)^2}=\frac{(2p+u)(2p-u)}{(u^2+4p^2)^2}$ 　 $g'(u)=0$となるのは $u=\pm 2p$

(2)より uの範囲は $-\sqrt2\leqq u\leqq\sqrt2$ だから.

u	$-\sqrt2$	$\cdots$	$-2p$	$\cdots$	$2p$	$\cdots$	$\sqrt2$
$g'(u)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(u)$		↘		↗		↘	

(i) $0<2p\leqq\sqrt2$ 　($0<p\leqq\frac{\sqrt2}{2}$) のとき

$g(u)$の増減は右上のようになる

$g(\sqrt2)=\frac{\sqrt2}{4p^2+2}$, $g(2p)=\frac{1}{4p}$

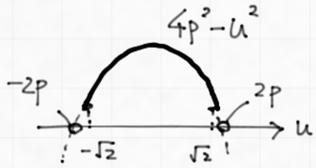
$g(-2p)=-\frac{1}{4p}$, $g(-\sqrt2)=\frac{-\sqrt2}{4p^2+2}$

$g(-\sqrt2)=\frac{-\sqrt2}{4p^2+2}<0<g(2p)$ だから

$g(u)$が最大となるのは $u=2p$ のときで 最大値は $\frac{1}{4p}$

同様に $g(-2p)<0<g(\sqrt2)$ だから $g(u)$が最小となるのは$u=-2p$のときで 最小値は $-\frac{1}{4p}$

よって $-\frac{1}{4p}\leqq\frac{u}{f}\leqq\frac{1}{4p}$



(ii) $2p>\sqrt2$ 　($p>\frac{\sqrt2}{2}$) のとき.

$-\sqrt2\leqq u\leqq\sqrt2$ において $g'(u)$は常に正となるので. $g(u)$は単調に増加する.

$g(-\sqrt2)=\frac{-\sqrt2}{4p^2+2}$, $g(\sqrt2)=\frac{\sqrt2}{4p^2+2}$ がそれぞれ最小値,最大値となっているので

$\frac{-\sqrt2}{4p^2+2}\leqq\frac{u}{f}\leqq\frac{\sqrt2}{4p^2+2}$