名古屋市立大学2021

1 (1) 真数条件より $x>0,\ y>0$

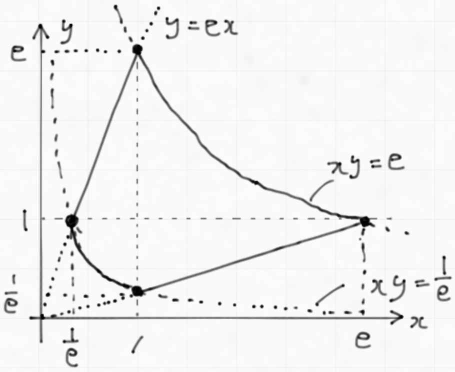
$\log x$ について、$0<x<1$ のとき $\log x<0$、$x\geqq 1$ のとき $\log x\geqq 0$ だから

(i) $x\geqq 1,\ y\geqq 1$ のとき　方程式は $\log x+\log y=1 \iff \log xy=\log e \iff xy=e$

(ii) $0<x<1,\ y\geqq 1$ のとき　$-\log x+\log y=1 \iff \log\frac{y}{x}=\log e \iff y=ex$

(iii) $x\geqq 1,\ 0<y<1$ のとき　$\log x-\log y=1 \iff \log\frac{x}{y}=\log e \iff y=\frac{1}{e}x$

(iv) $0<x<1,\ 0<y<1$ のとき　$-\log x-\log y=1 \iff \log xy=\log e^{-1} \iff xy=\frac{1}{e}$

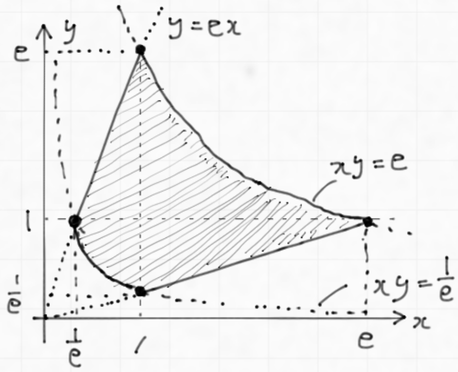


(2) (i) $x\geqq 1,\ y\geqq 1$ のとき　$\log x+\log y\leqq 1 \iff xy\leqq e$

(ii) $0<x<1,\ y\geqq 1$ のとき　$-\log x+\log y\leqq 1 \iff y\leqq ex$

(iii) $x\geqq 1,\ 0<y<1$ のとき　$\log x-\log y\leqq 1 \iff y\geqq\frac{1}{e}x$

(iv) $0<x<1,\ 0<y<1$ のとき　$-\log x-\log y\leqq 1 \iff xy\geqq\frac{1}{e}$



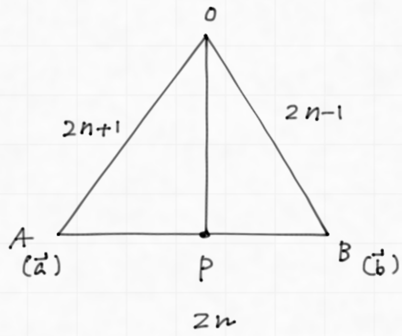
もとめる面積を S とする

$$S=\frac{1}{2}(1+e)\left(1-\frac{1}{e}\right)+\int_1^e\frac{e}{x}dx-\int_{\frac{1}{e}}^1\frac{1}{ex}dx-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}+1\right)(e-1)$$

$$=\frac{e^2-1}{2e}+e\Big[\log|x|\Big]_1^e-\frac{1}{e}\Big[\log|x|\Big]_{\frac{1}{e}}^1-\frac{e^2-1}{2e}$$

$$=e(1-0)-\frac{1}{e}(0+1)=\mathbf{e-\frac{1}{e}}$$

名古屋市立大学2021



2 (1) $|\vec{a}| > |\vec{b}-\vec{a}| > |\vec{b}|$ だから

$\angle OBA > \angle AOB > \angle OAB$

したがって$\angle OBA$が鋭角であることを示せばよい

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (2n)^2 \iff |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 4n^2$$

$$\iff (2n-1)^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + (2n+1)^2 = 4n^2 \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 2n^2+1$$

$$\cos\angle OBA = \frac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BO}||\overrightarrow{BA}|} = \frac{(-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})}{(2n-1)\cdot 2n} = \frac{-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}{4n^2-2n} = \frac{-2n^2-1+(2n-1)^2}{4n^2-2n} = \frac{n-2}{2n-1}$$

nは3以上の自然数だから $\dfrac{n-2}{2n-1} > 0$ であり. $\angle OBA$は鋭角である.

よって$\triangle OAB$は鋭角三角形である.

(2) $OP \perp AB$ だから $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ ここに $\overrightarrow{OP} = \vec{a} + t\overrightarrow{AB}$ などを代入

$$(\vec{a} + t\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \iff (\vec{a} + t\vec{b} - t\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0$$

$$2n^2+1 - (2n+1)^2 + t(2n-1)^2 - t(2n^2+1) - t(2n^2+1) + t(2n+1)^2 = 0$$

$$-2n^2 - 4n + 4tn^2 = 0$$

$$t = \frac{2n^2+4n}{4n^2} = \frac{n+2}{2n}$$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$

(3) $$|\overrightarrow{OP}|^2 = |\vec{a}+t\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2t\,\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB} + t^2|\overrightarrow{AB}|^2 = (2n+1)^2 + 2t(\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{a}|^2) + t^2(2n)^2$$

$$= 4n^2+4n+1 + \cancel{2}\cdot\frac{n+2}{\cancel{2n}}\overbrace{(2n^2+\cancel{1}-4n^2-4n-\cancel{1})}^{-2n-4} + \frac{(n+2)^2}{\cancel{4n^2}}\times\cancel{4n^2}$$

$$= 4n^2+\cancel{4n}+1-2n^2-\cancel{4n}-\cancel{4n}-8+n^2+\cancel{4n}+4 = 3n^2-3$$

$|\overrightarrow{OP}| = m$ と表すと (mは自然数)

$$m^2 = 3(n^2-1)$$

mは3の倍数となるので $m = 3m'$ とする (m'は自然数)

$$9m'^2 = 3(n^2-1) \iff 3m'^2 = n^2-1$$

$m'=1$のとき $n^2=4$ となり不適 ($\because n \geqq 3$)

$m'=2$ 〃 $n^2=13$ となり不適

$m'=3$ のとき $n^2=28$ となり不適

$m'=4$ 〃 $n^2=49$ となり $n=7$

よって$|\overrightarrow{OP}|$が整数となる最小のnは7

名古屋市立大学2021

3

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2} \iff (n+2)a_{n+1} = n a_n$$

この式の両辺に $n+1$ を掛けると $(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)n a_n$

が成り立つ。これより

$$(n+1)n a_n = n(n-1)a_{n-1} = (n-1)(n-2)a_{n-2} = \cdots = 2\cdot 1\cdot a_1 = 4$$

$$a_n = \frac{4}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\times 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} 4\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)\right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} 4\left(1-\frac{1}{N+1}\right) = 4$$

名古屋市立大学2021

(1) Aが最初の手順で同じカードを選ぶと、Aが2枚のカードを自分のものとするので、Bが勝つことはなくなる。つまり最初の手順でAは異なるカードを選ばなければならない
このとき、Bは最後の2枚のカードをとり、4枚のカード全てを自分のものとするのでBが勝利する。
よって $n=2$ でBが勝つ確率は

$$P(2) = \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{4}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

(2) (i) Aが最初の手順で同じカードを選んだとき。

Aは2枚のカードを自分のものとし、その後、4枚のカードから、再び2枚を選ぶ。
これは $n=2$ のときの状況と同じで、Aは2回目も同じカードを引かないと勝利できない。

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_2}{{}_6C_2} \times P(2) = \frac{3\cdot 2}{6\cdot 5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

(ii) Aが最初の手順で異なるカードを選んだとき。

1	2	3
1	2	3

仮に1と2のカードを選んだものとする。
次のBの手順で、残った4枚のカードのうち、どの2枚を選んだとしても、机上に同じ数のカードが存在するので、Bはカードを自分のものとすることができ、もう一度、カードを引くことができる。つまり(ii)では、Bは必ず6枚のカードを得ることになり勝利する。

$$\frac{{}_3C_2 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} \times 1 = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 2\cdot 2}{\cancel{6}\cdot 5} = \frac{4}{5}$$

(i)(ii)より $\frac{2}{15} + \frac{4}{5} = \mathbf{\frac{14}{15}}$

(3) (i) Aが最初の手順で同じカードを選んだとき。 $\left(\frac{{}_4C_1 \times {}_2C_2}{{}_8C_2} = \frac{1}{7} \right)$

$n=3$ のときと同じ状況。
次の手順でAが異なるカードを選ぶとBが勝利する ((2)(ii))
次の手順でAが同じカードを引き、次も同じカードを引いたときのみAは勝ち。

Aが勝つ

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_2C_2}{{}_8C_2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{\cancel{4}\cdot 1\cdot \cancel{2}}{\cancel{8}\cdot 7} \times \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{6}\cdot 5} \times \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}\cdot 3} = \frac{1}{105}$$

引き分け

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_2C_2}{{}_8C_2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_2}{{}_6C_2} \times P(2) = \frac{\cancel{4}\cdot\cancel{2}}{\cancel{8}\cdot 7} \times \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{6}\cdot 5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{105}$$

Bが勝つ。

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_2C_2}{{}_8C_2} \times \left(1 - \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_2}{{}_6C_2}\right) = \frac{\cancel{4}\cdot\cancel{2}}{\cancel{8}\cdot 7} \times \left(1 - \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{6}\cdot 5}\right) = \frac{4}{35}$$

(ii) Aが最初のカードで異なるカードを選んだとき. $\left(\frac{{}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_8C_2} = \frac{\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot2}{\cancel{8}\cdot7} = \frac{6}{7}\right)$

1	2	3	4
1	2	3	4

仮に1,2を選んでいたとして説明する.

① Bが 1,2 を選んだとき. 4枚のカードを自分のものとし.
次の手順で同じカードをえれば勝利. 異なるカードを引いた場合.
次のAの手順でAは4枚のカードを自分のものとして. 引き分け

② Bが 1,3 または 3,3 のように 2枚のカードを自分のものとしたとき.

次のBの手順でも必ず同じカードが引かれるので.((2)(ii)と同様) Bは全てのカードを自分のものとして勝利する.

③ Bが 3,4 のように引いたとき.

その後, Aは全てのカードを自分のものとする.

以上より

Aの勝利

$$\frac{6}{7}\times\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{\cancel{6}}{7}\times\frac{2\cdot2\cdot2}{\cancel{6}\cdot5} = \frac{8}{35}$$

引き分け

$$\frac{6}{7}\times\frac{{}_1C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}\times P(2) = \frac{\cancel{6}}{7}\times\frac{2}{\cancel{6}\cdot5}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{105}$$

Bの勝利

$$\frac{6}{7}\times\frac{{}_1C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_2C_2}{{}_4C_2} + \frac{6}{7}\times\left(\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}+\frac{{}_2C_1\times{}_2C_2}{{}_6C_2}\right) = \frac{2}{105}+\frac{4}{7} = \frac{62}{105}$$

以上より

$$P(4) = \frac{4}{35}+\frac{62}{105} = \boldsymbol{\frac{74}{105}} \qquad Q(4) = \frac{2}{105}+\frac{4}{105} = \frac{6}{105} = \boldsymbol{\frac{2}{35}}$$