京都大学2022

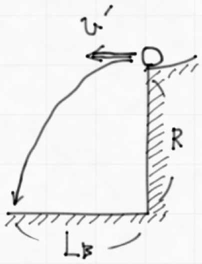
1

(1) 運動量保存　$mv = -mv' + MV$ ア

エネルギー保存　$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-v')^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV^2$ イ

これらを解くと　$v = \frac{m+M}{2m}V$ ウ，$v' = \frac{M-m}{2m}V$ エ

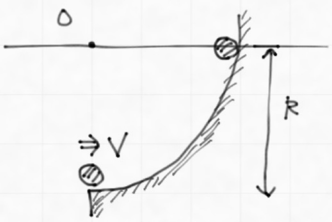
Bが左に跳ね返されるのは$v'>0$のときで、$M>m$ オ



Bが床面に達する時刻をtとすると、

$$\begin{cases} L_B = v't \\ \frac{1}{2}gt^2 = R \end{cases}$$

が成り立つので　$L_B = v'\sqrt{\frac{2R}{g}} = \frac{M-m}{2m}\sqrt{\frac{2R}{g}}V$ カ



Aについて、

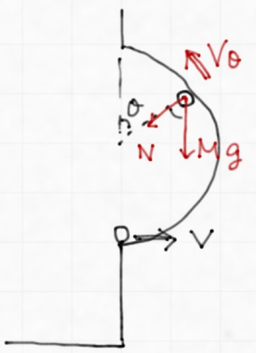
衝突時とOと同じ高さまであがってきたときのエネルギーを考えて

$\frac{1}{2}MV^2 = MgR$　　∴ $V = \sqrt{2gR}$ キ

床面に達したときの位置は飛び出したときの初速によって定まり質量とは無関係。また、Aのエネルギーが保存されることから、飛び出す際のAの速度は$-V$となる。

以上の考察から必要な条件は、　$V = v'$

すなわち　$\frac{M-m}{2m}V = V$　で、そのための条件は $M=3m$ ク

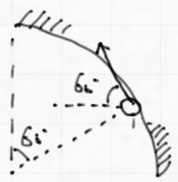


(2) 離れる点での運動方程式　$M\frac{V_\theta^2}{R} = N + Mg\cos\theta$　(Nは0)

エネルギー保存　$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV_\theta^2 + MgR(1+\cos\theta)$

$V_\theta = \sqrt{Rg\cos\theta}$ ケ

$V = \sqrt{Rg\cos\theta + Rg + Rg\cos\theta} = \sqrt{Rg(2+3\cos\theta)}$ コ



$\theta=60°$で飛び出したことを用いると

$V_1 = V_\theta\cos 60° = \frac{1}{2}\sqrt{Rg\cos 60°} = \frac{1}{4}\sqrt{2gR}$ サ

鉛直方向は速さ$V_\theta\sin 60°$で上向きに飛び出す。

初めの位置まで戻ったとき、エネルギー保存を用いて

$\frac{1}{2}M(V_\theta\sin 60°)^2 + \frac{3}{2}RMg = \frac{1}{2}MV_2^2$

$\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{M}Rg\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{\cancel{2}}\cancel{M}Rg = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{M}V_2^2$

$V_2 = \frac{27}{8}Rg = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3Rg}{2}}$ シ

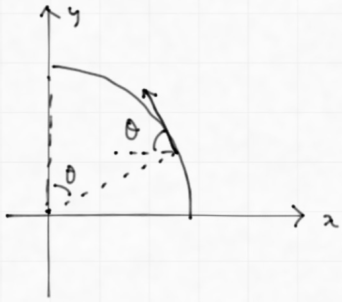
初め位置に衝突してから床面に衝突するまでの時間をtとすると.

$$\begin{cases} L_A = V_1 t \\ -R = V_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

が成り立つ. 2つ目の式から $t = \dfrac{V_2 + \sqrt{V_2^2 + 2gR}}{g}$

これを1つ目の式に代入 $L_A = \dfrac{V_2 + \sqrt{V_2^2 + 2gR}}{g} V_1$

問1 離れるときの速さは $V_\theta = \sqrt{gR\cos\theta}$



その後の運動をOを原点, 右向き, および上向きを正として表すと

$$\begin{cases} x = R\sin\theta - V_\theta \cos\theta \cdot t \\ y = R\cos\theta + V_\theta \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$x = 0$ のとき $y = -R$ となればよいのでこれを代入すると.

$$t = \frac{R\sin\theta}{V_\theta \cos\theta}$$

$$-\cancel{R} = \cancel{R}\cos\theta + \cancel{V_\theta}\sin\theta \cdot \frac{\cancel{R}\sin\theta}{\cancel{V_\theta}\cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{R^{\cancel{2}} \sin^2\theta}{V_\theta^2 \cos^2\theta}$$

$$-1 = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{2}\cancel{g}\tan^2\theta \cdot \frac{\cancel{R}}{\cancel{gR}\cos\theta}$$

$$-\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\tan^2\theta$$

$$-2\cos^3\theta = 2\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta$$

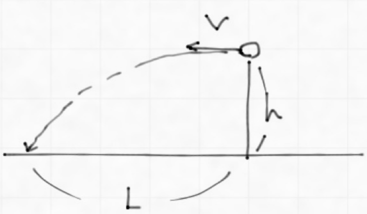
$$2\cos^3\theta + 3\cos^2\theta - 1 = 0$$

$$(2\cos\theta - 1)(\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1) = 0$$

これを満たすのは $\cos\theta = \frac{1}{2}$ のみ.

(3) 問2 高さhから初速Vで水平に投射されたとき床面との衝突位置をLとすると

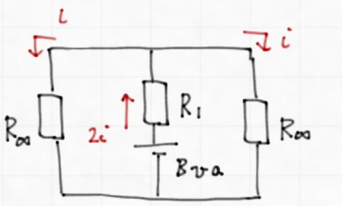
$\frac{1}{2} g t^2 = h$, $L = Vt$ より $L = V\sqrt{\frac{2h}{g}}$ となり.



高さの平方根に比例する. エネルギーが保存することから斜めに投げ上げたときの最高点をhとしたときの水平移動距離はLに等しい.

Vが十分に大きいとき、(a)のときの最高点での速さもVとほとんど変わらないと考えられるので L_1 と L_2 の比は高さの比 $3R : R$ の平方根の比 $\sqrt{3} : 1$ に近付くことになる.

2



(1) イ Bva

ロ 右図のように電流iを設定する

$$Bva = 2iR_1 + iR_\infty$$

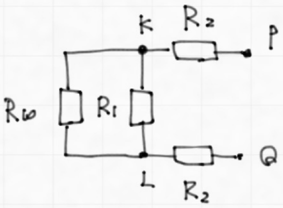
$$i = \frac{Bva}{2R_1 + R_\infty} \qquad 2i = \frac{2Bva}{2R_1 + R_\infty}$$

ハ $P = (2i)^2 R_1 + i^2 R_\infty \times 2 = \dfrac{2B^2v^2a^2}{2R_1 + R_\infty}$

(2)

問1 PQの左側の合成抵抗値をR_∞とする。このとき

KL 〃 もR_∞だから 左下図の合成抵抗値もR_∞となる。



$$\frac{1}{R_\infty} + \frac{1}{R_1} = \frac{R_1 + R_\infty}{R_1 R_\infty}$$

$$R_\infty = \frac{R_1 R_\infty}{R_1 + R_\infty} + 2R_2$$

$R_1 : R_2 = 4 : 1$のとき、$R_2 = \frac{1}{4}R_1$を上の式に代入

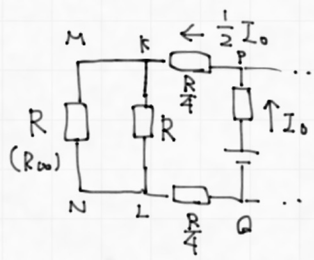
$$R_\infty = \frac{R_1 R_\infty}{R_1 + R_\infty} + \frac{R_1}{2}$$

$$\cancel{R_1 R_\infty} + R_\infty^2 = \cancel{R_1 R_\infty} + \frac{1}{2}R_1^2 + \frac{1}{2}R_1 R_\infty$$

$$2R_\infty^2 - R_1 R_\infty - R_1^2 = 0$$

$$(2R_\infty + R_1)(R_\infty - R_1) = 0 \qquad \therefore \ R_\infty = R_1$$

(3) ニ $I_0 = \dfrac{2Bva}{2R_1 + R_\infty} = \dfrac{2E}{2R + R} = \dfrac{2E}{3R}$



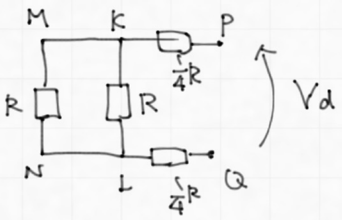
ホ 左図より KLを流れる電流はPKを流れる電流の$\frac{1}{2}$倍。したがってI_0の$\frac{1}{4}$倍

ヘ 同様に MNはその$\frac{1}{2}$倍。つまりI_0の$\frac{1}{8}$倍

(4) ト. PQ間の電圧は $E - \frac{2E}{3R}\cdot R = \frac{1}{3}E$ だから $\frac{1}{3}Bva > V_d$ が成り立つとき、ダイオードは点灯する

$$v > \frac{3V_d}{Ba} = v_0$$

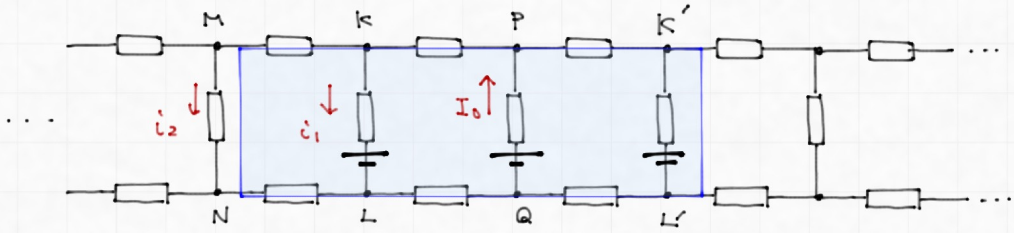
チ $E - V_d = I_0 R \qquad I_0 = \dfrac{E - V_d}{R}$



リ 合成抵抗値は $\frac{R}{2} + \frac{1}{4}R \times 2 = R$ だから

P→K は $\frac{V_d}{R}$ (A) K→L は $\frac{V_d}{2R}$ (A) の電流が流れる。

ヌ $I_0 - \dfrac{V_d}{R} \times 2 = \dfrac{E - 3V_d}{R}$



ル　(3) の結果を用いる.

$$I_0 = \frac{2E}{3R} - \left(\frac{2E}{3R}\right)\times\frac{1}{4} - \left(\frac{2E}{3R}\right)\times\frac{1}{4} = \frac{E}{3R}$$

ヲ

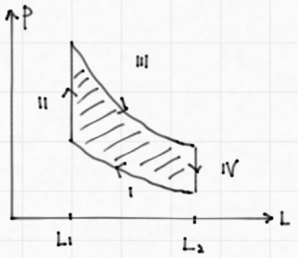
$$i_1 = -\frac{2E}{3R} + \left(\frac{2E}{3R}\right)\times\frac{1}{4} + \left(\frac{2E}{3R}\right)\times\frac{1}{8} = -\frac{2E}{3R}\times\frac{5}{8} = -\frac{5E}{12R}$$

ワ

$$i_2 = \frac{2E}{3R}\times\frac{1}{4} + \frac{2E}{3R}\times\frac{1}{8} + \frac{2E}{3R}\times\frac{1}{16} = \frac{7E}{24R}$$

3 (1) あ. $pSL = nRT$ より $p = \dfrac{nRT}{SL}$

い $\Delta U = nC_v\Delta T$　　う $\Delta U = 0$　　え $\Delta W = pS\Delta L = \dfrac{nRT}{L}\Delta L$



お　等温変化で仕事を行うとき ($\because \Delta Q = W$)
定積変化で温度が上がるとき ($\because \Delta Q = \Delta U$) なので
過程IIとIIIが該当する ② ②

か　過程I(負の仕事)と過程III(正の仕事)を較べて 総量は正 ①

(2)

$$F = AT(L - L_0)$$

$$\downarrow \quad \Delta Q = -F\Delta L + \underbrace{K\Delta T}_{=\Delta U}$$

$$F + \Delta F = A(T + \Delta T)(L + \Delta L - L_0)$$

き $\Delta U = \Delta Q + F\Delta L$
$= \Delta Q + AT(L - L_0)\Delta L$

く 断熱的に変化 … $\Delta Q = 0$

$$\Delta U = AT(L - L_0)\Delta L = K\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{AT(L - L_0)}{K}\Delta L$$

$F_1 = AT_A(L_1 - L_0)$

α 等温 ↓ $\Delta Q_\alpha = W_1 + 0$

$F_1 + \Delta F = AT_A(L_2 - L_0)$

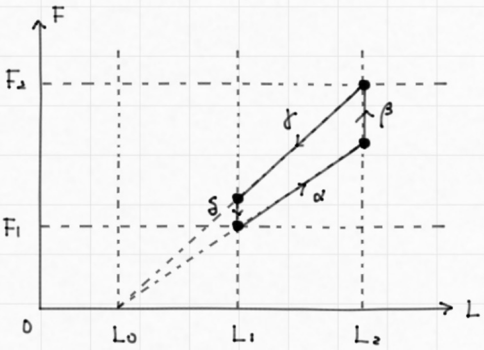
β 等長 ↓ $\Delta Q_\beta = 0 + K(T_B - T_A)$

$F_2 = AT_B(L_2 - L_0)$

γ 等温 ↓ $\Delta Q_\gamma = W_3 + 0$

$F_2 + \Delta F' = AT_B(L_1 - L_0)$

δ 等長 ↓ $\Delta Q_\delta = 0 + K(T_A - T_B)$



FとΔLは比例
$L = L_0$で $F = 0$
等長のときLは一定

け. $W_1 = -\dfrac{F_1 + F_1 + \Delta F}{2} \times (L_2 - L_1) = -\dfrac{1}{2}AT_A(L_1 + L_2 - 2L_0)(L_2 - L_1)$

こ $W_3 = -\dfrac{F_2 + F_2 + \Delta F'}{2} \times (L_1 - L_2) = \dfrac{1}{2}AT_B(L_1 + L_2 - 2L_0)(L_2 - L_1)$
$= -\dfrac{T_B}{T_A}W_1$

さ $W_2 = W_4 = 0$

し け.より $W_1 < 0$.

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = W_1 - \frac{T_B}{T_A}W_1 = W_1 \times \frac{T_A - T_B}{T_A} > 0$$

($\because W_1 < 0,\ T_A - T_B < 0$)

よって仕事の総量は正 ①

問2　(1)のとき 断熱的にLを大きくすると気体は正の仕事をするため、気体の内部エネルギーは減少し温度は低下する。(2)で断熱的にLを大きくしたときのヒモの仕事は負で、そのためヒモの内部エネルギーは増加し、ヒモの温度は上昇する。