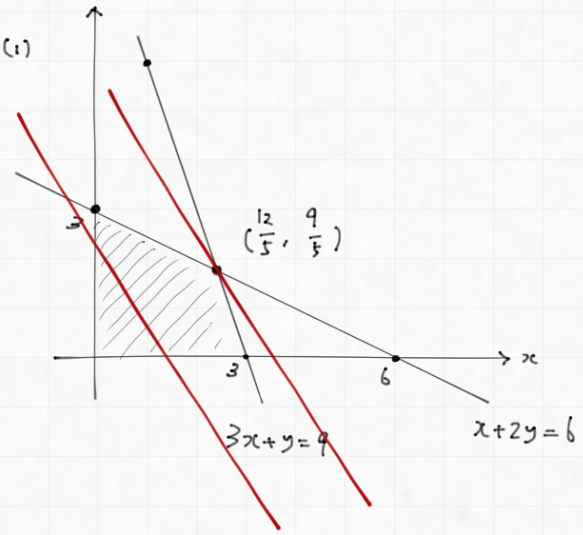
長崎大学2022 水産

1 (1)



$x+2y=6$ と $3x+y=9$ の交点は

$x+2(9-3x)=6$

$5x=12$

$x=\frac{12}{5}$, $y=\frac{9}{5}$

$2x+y=k$ とおくと

$y=-2x+k$

これは傾き-2の直線で、この直線と領域が共有点を持つ範囲で切片kが最大となるのは $(x, y)=\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$ のとき。

このとき $k=2\cdot\frac{12}{5}+\frac{9}{5}=\frac{33}{5}$

最大値は $\frac{33}{5}$ $P\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$

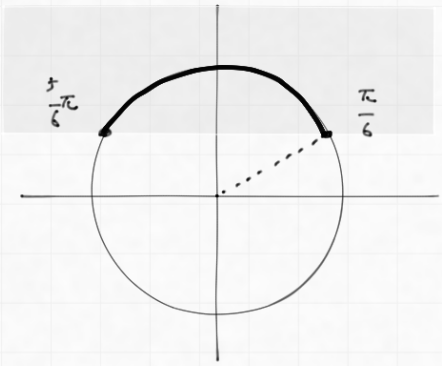
(2) $\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta = 2\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta\right) = 2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right) \geqq 1$

$0 \leqq \theta < \pi$ より $\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$ で $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right) \geqq \frac{1}{2}$ となるのは、

右図より

$\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\frac{\pi}{6} \leqq \frac{5}{6}\pi$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{3}\pi$



(3) $a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

$\{a_n-1\}$ は初項 a_1-1, 公比 2 の等比数列

$a_n-1=(2-1)\times 2^{n-1}$

$a_n=2^{n-1}+1$

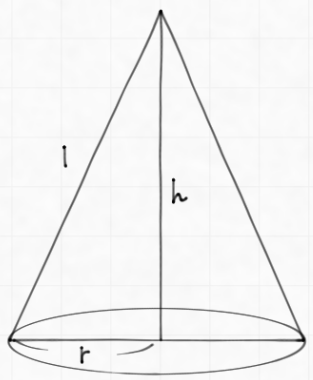
$\sum_{k=1}^{n} 2k a_k = \sum_{k=1}^{n}(k\cdot 2^k+2k) = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k + n(n+1)$

$$\begin{array}{rl}
 & \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = 1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n \\
-) & 2\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = \quad 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1} \\
\hline
 & -\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = 1\cdot 2^1+1\cdot 2^2+1\cdot 2^3+\cdots+1\cdot 2^n-n\,2^{n+1} = \frac{2(2^n-1)}{2-1}-n\,2^{n+1} = 2^{n+1}-n\cdot 2^{n+1}-2
\end{array}$$

$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = (n-1)2^{n+1}+2$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} 2k a_k = 2^{n+1}(n-1)+n^2+n+2$

(4)



底面の半径をrとすると

$$1 = h^2 + r^2 \iff r^2 = 1 - h^2$$

$$V(h) = \pi r^2 \times h \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\pi h(1-h^2) = \frac{1}{3}\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3$$

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi - \pi h^2 = \frac{1}{3}\pi(1-3h^2)$$

$h = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $V'(h) = 0$

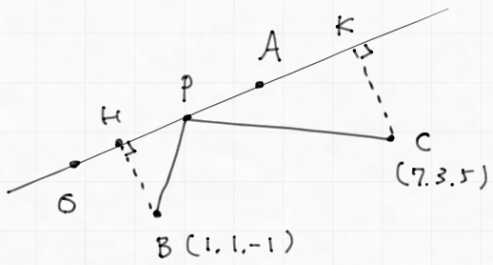
V(h)の増減は右のようになる

h	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		↗		↘	

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\pi \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{27}\sqrt{3}\pi$$

V(h)の最大値は $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$ そのときのhは $\frac{1}{\sqrt{3}}$

2



(1) $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} = t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$BP^2 + CP^2 = |\overrightarrow{BP}|^2 + |\overrightarrow{CP}|^2$

$= (1-t)^2 + (1-2t)^2 + (-1-3t)^2 + (7-t)^2 + (5-2t)^2 + (5-3t)^2$

$= 1 - \cancel{2t} + t^2 + 1 - \cancel{4t} + 4t^2 + 1 + \cancel{6t} + 9t^2$

$+ 49 - 14t + t^2 + 9 - 12t + 4t^2 + 25 - 30t + 9t^2$

$= \mathbf{28t^2 - 56t + 86}$

(2) $BP^2 + CP^2 = 28(t-1)^2 + 58$ $t=1$のとき最小

最小値は **58** このとき **P(1.2.3)**

(3) $\overrightarrow{OH} = h\overrightarrow{OA}$ とおく

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$ に $\overrightarrow{OH} = h\overrightarrow{OA}$ を代入.

$h|\overrightarrow{OA}|^2 = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

成分代入

$14h = (1,2,3)\cdot(1,1,-1) = 1+2-3 = 0$ $h=0$だから **H(0.0.0)**

$\overrightarrow{OK} = k\overrightarrow{OA}$ とおく

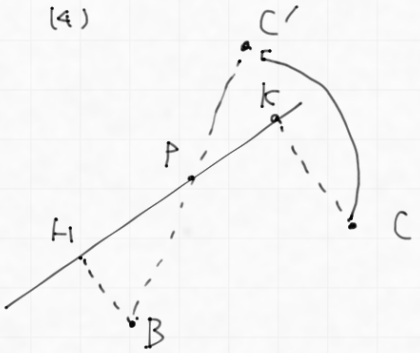
$\overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$ に上式および成分を代入

$14k = 1\cdot7 + 2\cdot3 + 3\cdot5 = 28$ $k=2$ よって **K(2.4.6)**

$\overrightarrow{HB} = (1,1,-1)$, $\overrightarrow{KC} = (5,1,1)$

$|\overrightarrow{HB}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{KC}| = 3\sqrt{3}$ $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{KC}}{|\overrightarrow{HB}||\overrightarrow{KC}|} = \dfrac{5+1-1}{\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}} = \mathbf{\dfrac{5}{9}}$

(4)



Cを OAを軸として回転させ. 平面HKBまで移した点をC'とする. BC'とOAとの交点をPとしたとき. BC'は最短で. △PKC ≡ △PKC'より. このとき. BP+PCも最小.

また. このとき. △BHP ∽ △C'KP であり その相似の比は BH : CK となり. $\sqrt{3} : 3\sqrt{3}$ すなわち. 1:3となっている. 以上より. HKを1:3に内分する点をPとしたとき. BP+CPは最小.

PはHKを1:3に内分する

$57 = \sqrt{14}$

Pは $\frac{3}{4}\overrightarrow{OH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OK} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$ $|\overrightarrow{HP}| = |\overrightarrow{OP}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{OK}| = \frac{\sqrt{14}}{2}$

$PB = \sqrt{BH^2 + HP^2} = \sqrt{3 + \frac{7}{2}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$

$BP + CP = BP + PC' \geqq \sqrt{\frac{13}{2}} \times 4 = \mathbf{2\sqrt{26}}$