関西医科大学2022 後期

1

(1) $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{3k}+\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{3k}$

$=\left(\cos\frac{\pi}{2}k+i\sin\frac{\pi}{2}k\right)+\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}k\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}k\right)\right)$

$=\cos\frac{\pi}{2}k+\cancel{i\sin\frac{\pi}{2}k}+\cos\frac{\pi}{2}k-\cancel{i\sin\frac{\pi}{2}k}=2\cos\frac{\pi}{2}k=\mathbf{0}$　（∵ kは奇数）

(2) $2022=3\times674$ だから. (1)より.

$\left\{\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right\}^{2022}+\left\{\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right\}^{2022}=2\cos\frac{\pi}{2}\times674=2\cos337\pi=2\cos\pi=\mathbf{-2}$

2 ある自然数mを用いて $n^2-30n+210=m^2$ と表せる.

$\Leftrightarrow \quad (n-15)^2-m^2=15$

$\Leftrightarrow \quad (n+m-15)(n-m-15)=3\times 5.$

$n+m-15>n-m-15$ および $n+m-15,\ n-m-15$ の偶奇が等しいことから

$(n+m-15,\ n-m-15)=(15,1),(5,3),(-3,-5),(-1,-15)$

それぞれを解くと

$(n,m)=(23,7),(19,1),(11,1),(7,7)$

上のnは全て素数だから.

$\therefore\ n=$ **7, 11, 19, 23**

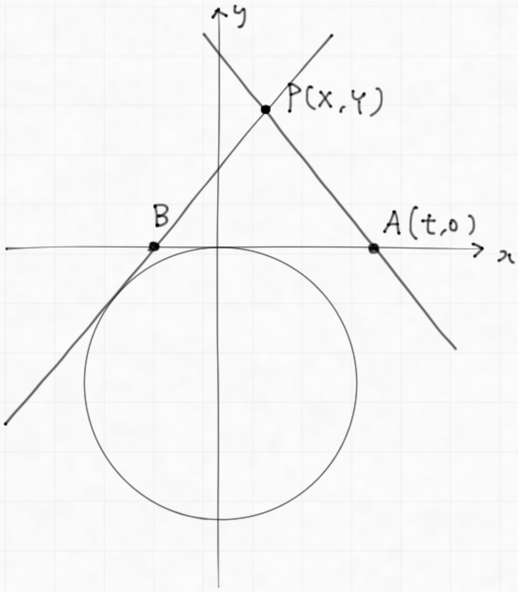
3

(1) $X \neq t$ のとき

$$y = \frac{Y}{X-t}(x-t) = \frac{Y}{X-t}x - \frac{Yt}{X-t}$$

$X = t$ のとき

$x = t$



$$\begin{cases} X \neq t \text{ のとき} \\ \quad y = \dfrac{Y}{X-t}x - \dfrac{Yt}{X-t} \\ X = t \text{ のとき} \\ \quad x = t \end{cases}$$

(2) (1) より AP は

$Yx - (X-t)y - Yt = 0$ （これは $x = t$ を含んでいる）

これと円の中心 $(0, -1)$ との距離が等しいとき AP は円と接する。

$$\frac{|X - t - Yt|}{\sqrt{Y^2 + (X-t)^2}} = 1$$

2乗して $\cancel{X^2} + \cancel{t^2} + Y^2t^2 - \cancel{2Xt} - 2XYt + 2Yt^2 = Y^2 + \cancel{X^2} - \cancel{2tX} + \cancel{t^2}$

$$(1-t^2)Y^2 - 2(t^2 - Xt)Y = 0$$

P は x 軸上にないので $Y \neq 0$. 上式を Y で割って

$$(1-t^2)Y - 2(t^2 - Xt) = 0$$

$$(Y+2)t^2 - 2Xt - Y = 0 \quad \cdots ①$$

ここで AP, BP はともに円と接するのだから ① は異なる2解をもつ

そのための条件は $Y + 2 \neq 0$、かつ 判別式を D として $D/4 = X^2 + Y(Y+2) > 0$

このとき ① より $t = \dfrac{X \pm \sqrt{X^2+Y^2+2Y}}{Y+2}$

このうち大きい方が A の x 座標だから

$$\begin{cases} Y > -2 \text{ のとき} & t = \dfrac{X + \sqrt{X^2+Y^2+2Y}}{Y+2} \\ Y < -2 \text{ のとき} & t = \dfrac{X - \sqrt{X^2+Y^2+2Y}}{Y+2} \end{cases}$$

(3) AB の長さは $\left|\dfrac{2\sqrt{X^2+Y^2+2Y}}{Y+2}\right|$

これが2となるときだから $\sqrt{X^2+Y^2+2Y} = |Y+2|$

2乗して $X^2 + \cancel{Y^2} + 2Y = \cancel{Y^2} + 4Y + 4$

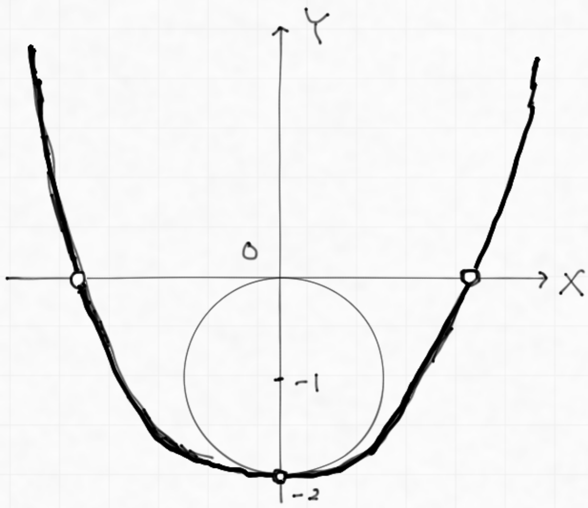
$$Y = \frac{1}{2}X^2 - 2$$

(2) より $X^2 + (Y+1)^2 > 1$, $Y \neq -2$, $Y \neq 0$

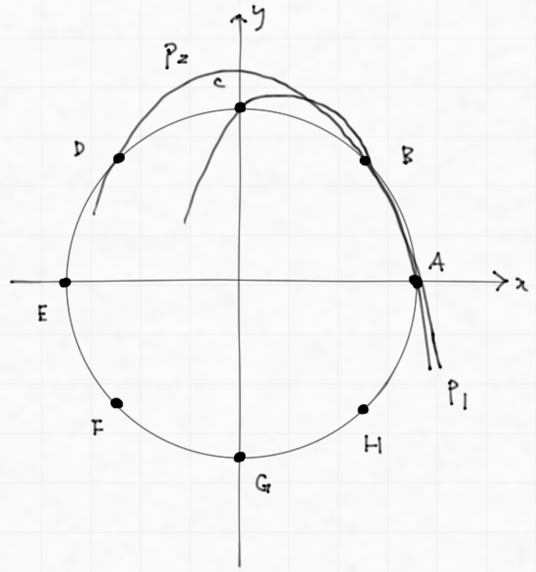
$X^2 + (Y+1)^2 = 1$ と $Y = \frac{1}{2}X^2 - 2$ の交点は $Y = -2$ のみだから

右図のようになる。

右図太線部分



4



(1) A(1, 0), B$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ C(0, 1)を通る

$y = ax^2 + bx + 1$とおける (∵ Cを通る)

Aを通るので $a + b + 1 = 0$ …①

Bを通るので $\frac{1}{2}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ …②

① − ② ×2 $(1-\sqrt{2})b = 1 - \sqrt{2}$

$b = 1,\ a = -2$

P_1 : $\boldsymbol{y = -2x^2 + x + 1}$

(2) 左図より. Fが通るかどうかを調べる

$-2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

通る点は**存在する** その頂点は **F**

(3) B, Dを通るので $y = cx^2 + d$ とおける.

Bを通るので. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}c + d$ …③

Aを通るので $0 = c + d$ …④

④ − ③ $c = -\sqrt{2}$, $d = \sqrt{2}$ P_2 : $\boldsymbol{y = -\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}}$

(4) 対称性を考えると通る頂点は**存在する**. その点は **E**

(5) x座標の等しい頂点は同時に選べない. (BとHなど)

対称性を考えて. 4点の組み合わせは

(A, B, C, F), (A, B, D, E), (C, D, E, H), (A H G D), (A H F E)

(E F G B)

の6通り $\frac{6}{{}_8C_4} = \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}\ = \boldsymbol{\frac{3}{35}}$

5

(1) $f(x)-ax-b=\dfrac{(2-a)x^3+bx^2-9ax}{x^2-9}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}=0$ は必要だから $a=2$.

$a=2$のとき

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2-18x}{x^2-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{b-\frac{18}{x}}{1-\frac{9}{x^2}}=b=0.$$

$\therefore\ (a, b)=\mathbf{(2, 0)}$

(2) $f(-x)=-f(x)$ が成り立つので $f(x)$ は奇関数なので $x\geqq 0$ で考える

$$f'(x)=\frac{(6x^2-12)(x^2-9)-2x(2x^3-12x)}{(x^2-9)^2}=\frac{2(x^2-3)(x^2-18)}{(x^2-9)^2}$$

$x>0$ で $f'(x)=0$ となるのは、$x=\sqrt{3},\ 3\sqrt{2}$

また $f(x)$ は $x=3$ で定義されていない。

以上より、$x>0$ における $f(x)$ の増減は右のようになる

x	0	…	$\sqrt{3}$	…	3	…	$3\sqrt{2}$	…
$f'(x)$		+	0	−	/	−	0	+
$f(x)$	0	↗		↘	/	↘		↗

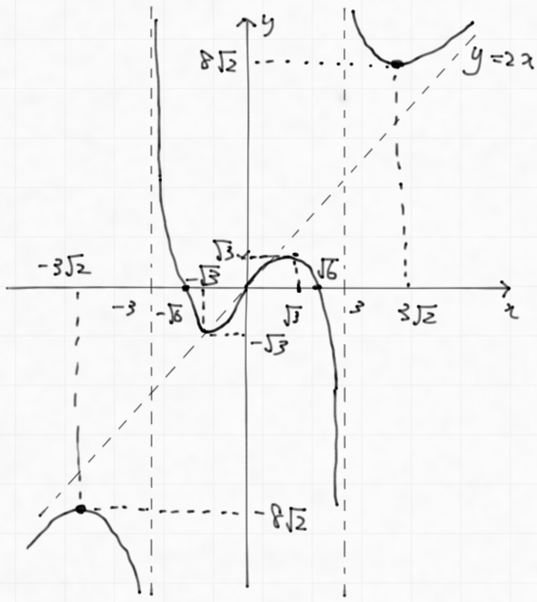
$f(\sqrt{3})=\sqrt{3},\quad f(3\sqrt{2})=8\sqrt{2}.\quad f(0)=0.$

$\displaystyle\lim_{x\to 3-0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to 3+0}f(x)=+\infty$

漸近線は $x=3,\ y=2x$.

$x<0$ の範囲は $x\geqq 0$ の範囲を原点について対称移動したものになる

以上より、グラフは右のようになる



(3) もとめる面積をSとして

$$S=2\int_0^{\sqrt{6}}\frac{2x^3-12x}{x^2-9}dx=2\int_0^{\sqrt{6}}2x+\frac{6x}{x^2-9}dx$$

$$=4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{6}}+6\int_0^{\sqrt{6}}\frac{(x^2-9)'}{x^2-9}dx$$

$$=12+6\left[\log|x^2-9|\right]_0^{\sqrt{6}}=12+6(\log 3-2\log 3)=\mathbf{6(2-\log 3)}$$