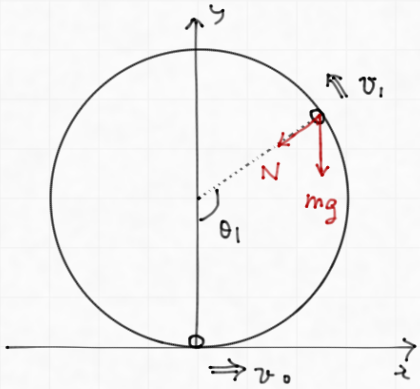
北海道大学2023

1



問1
$$\begin{cases} \text{エネルギー保存} & \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgR(1-\cos\theta) \\ \text{運動方程式} & m\frac{v_1^2}{R} = N - mg\cos\theta \end{cases}$$

より $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)}$ … (1)

このとき $N = mg\cos\theta + \frac{m}{R}\left(v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)\right)$

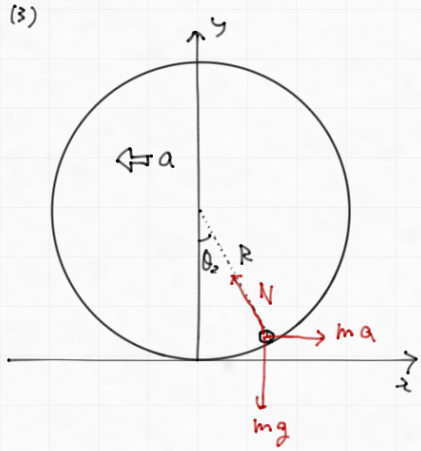
$$= -2mg + 3mg\cos\theta + m\frac{v_0^2}{R} \quad \cdots (2)$$

$\theta = \theta_1$ のとき $N=0$ だから

$$3mg\cos\theta_1 = 2mg - m\frac{v_0^2}{R} \qquad \cos\theta_1 = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gR} \quad \cdots (3)$$

$\theta_1 = 180^\circ$ のとき $N \geqq 0$ となれば最上点を通過できる

$$-2mg - 3mg + m\frac{v_0'^2}{R} \geqq 0 \qquad v_0' \geqq \sqrt{5gR} \quad \cdots (4)$$

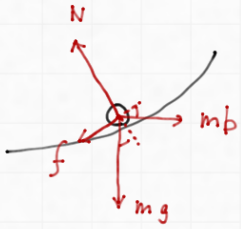


問2 接線方向の力のつりあい $mg\sin\theta_2 = ma\cos\theta_2$ より

$$\tan\theta_2 = \frac{a}{g} \quad \cdots (5)$$

みかけの重力加速度の大きさは $\sqrt{g^2+a^2}$

単振り子の周期の公式より $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{\sqrt{g^2+a^2}}}$ … (6)



力のつりあい
$$\begin{cases} N = mg\cos\theta_2 + ma\sin\theta_2 \\ f + mg\sin\theta_2 = ma\cos\theta_2, \quad f \leqq \mu N \end{cases}$$

$$\cancel{m}b\cos\theta_2 - \cancel{m}g\sin\theta_2 \leqq \mu(\cancel{m}g\cos\theta_2 + \cancel{m}b\sin\theta_2)$$

$$b\cos\theta_2 - \mu b\sin\theta_2 \leqq \mu g\cos\theta_2 + g\sin\theta_2$$

両辺を $\cos\theta_2$ で割り、$\tan\theta_2 = \frac{a}{g}$ を代入

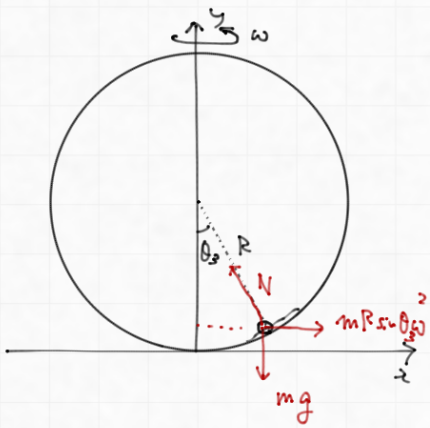
$$b - \mu b\frac{a}{g} \leqq \mu g + a$$

$$b \leqq \frac{\mu g + a}{1 - \frac{a}{g}\mu} = \frac{a+\mu g}{g-\mu a}g \quad \cdots (7)$$

$\left(\frac{\tan\theta_2+\mu}{1-\mu\tan\theta_2}g \text{ も OK}\right)$

(これより大きくなるとすべり始める)

問3 円運動している視点で考える



遠心力は $mR\sin\theta\omega^2$. この力を含めて、力のつりあいを考えると

$$\begin{cases} mR\sin\theta_3\omega^2\cos\theta_3 = mg\sin\theta_3 \\ N = mR\sin\theta_3\omega^2\sin\theta_3 + mg\cos\theta_3 \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos\theta_3}}$$

$N = mR(1-\cos^2\theta_3)\omega^2 + mg\cos\theta_3$ に　$\cos\theta_3 = \dfrac{g}{R\omega^2}$ を代入して

$$N = mR\omega^2 - m\cancel{R}\cancel{\omega^2}\cdot\frac{g^2}{R^{\cancel{2}}\omega^{\cancel{4}\,2}} + mg\frac{g}{R\omega^2} = \mathbf{mR\omega^2} \quad \cdots (9)$$

$\cos\theta_3 = \dfrac{g}{R\omega^2} > 1$ のとき、小球が静止するのは最下点で $\theta_3 = 0$ と限定される。

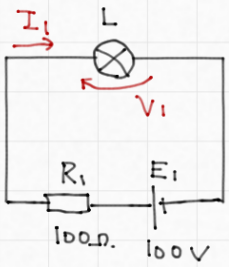
小球が最下点を中心として振動することができるのは このときに限られる。

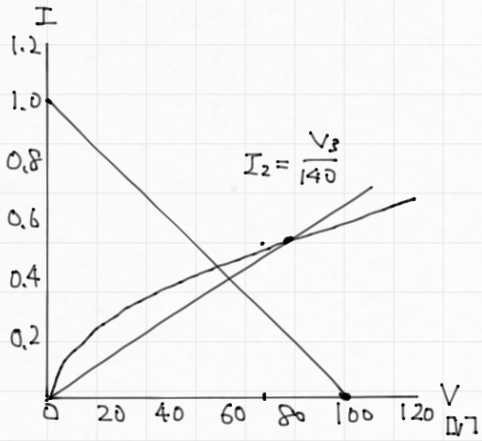
$$R\omega^2 < g \quad \Leftrightarrow \quad \omega < \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \cdots (10)$$

2

問1 (1) 回路の式 $E_1 = V_1 + I_1R_1$ より

$$V_1 = 100 - 100I_1$$





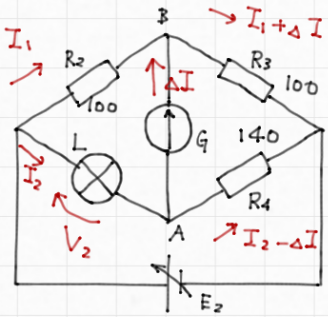
(2) $V_1 = 100 - 100I_1$ をグラフに書きこむ

右図の交点を考えて.

$V_1 = 55$ $I_1 = 4.5 \times 10^{-1}$ (A)

(3) 消費電力を P_1 として

$P_1 = V_1I_1 = 24.75 = 2.5 \times 10^1$ [W]



(4) R_2を流れる電流を I_1 とすると

$I_1R_2 = V_2$, $(I_1 + \Delta I)R_3 = (I_2 - \Delta I)R_4$

の関係が成り立つ. この2式から I_1 を消去して.

$$\left(\frac{V_2}{R_2} + \Delta I\right)R_3 = (I_2 - \Delta I)R_4$$

$$I_2 = \frac{R_3 + R_4}{R_4}\Delta I + \frac{R_3}{R_2R_4}V_2$$

(5) $R_2 = R_3 = 100$, $R_4 = 140$, $\Delta I = 0$ を代入 $I_2 = \frac{V_3}{140}$ これを右上グラフに書きこんで

$V_2 = 70$ (V) $I_2 = 0.5$ (A)

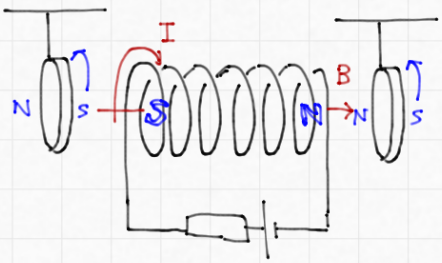
(6) (4)の結果より. V_2を小さくすると ΔI が大きくなるので. E_2を小さくすればよい (3)

問2 (6) $H = \frac{N}{L}I$ (n) 右 (3) (7) $\Phi = \mu_0 HS = \frac{\mu_0 NIS}{L}$

(8) $V = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N\frac{\mu_0 NS}{L}\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t}$ $|V| = \frac{\mu_0 N^2 S}{L\Delta t}|\Delta I|$

(9) (8)の結果より 自己インダクタンスは $\frac{\mu_0 S N^2}{L}$

(10) $V_M = -M\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -M\frac{\mu_0 NS}{L}\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t}$ $|V_M| = \frac{\mu_0 NMS}{L}\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right|$



(う) リング1では. 右向きの磁束が増加するので.
それを妨げる向きである左向きの磁場を作るような
向きの電流が流れる. (aの向き)
リング2も同様で aの向き. (3)

(え) 左図のように N, S極が現れるので. いずれのリングも
反発する力を受ける (1)

3

問1

$pV = RT$ …①

定圧 ↓

$Q = p\Delta V + C_V\Delta T$ …④

$p(V+\Delta V) = R(T+\Delta T)$ …②

$pV = RT$

断熱 ↓

$0 = -W + C_V\Delta T$ …⑤

$(p+\Delta p)(V+\Delta V) = R(T+\Delta T)$ …③

(1) Wが気体がされた仕事であることに注意して.

熱力学第1法則より. $Q = -W + \Delta U$ $\therefore \Delta U = \mathbf{Q + W}$

(2) $-W \fallingdotseq p\Delta V$ と近似できるとあるので $Q = \mathbf{p\Delta V + C_V\Delta T}$

(3) 定圧変化では ①②より $p\Delta V = R\Delta T$ が成り立っているので

$Q = p\Delta V + C_V\Delta T = \mathbf{(R+C_V)\Delta T}$

(4) ⑤より $p\Delta V + C_V\Delta T = 0$ $\Delta T = \mathbf{-\frac{p\Delta V}{C_V}}$

(5) (4)より $p = -\Delta T\frac{C_V}{\Delta V}$ を①に代入 $-\Delta T\frac{C_V}{\Delta V}V = RT \Leftrightarrow \frac{\Delta T}{T} = \mathbf{-\frac{R}{C_V}}\frac{\Delta V}{V}$

(3)より $Q = (R+C_V)\Delta T = C_p\Delta T$ として. $C_p = C_V + R$

これと $\frac{C_p}{C_V} = \gamma$ を連立 $C_V = \frac{R}{\gamma-1}$ が導かれる

(5)を積分すると $\log T = -\frac{R}{C_V}\log V + D = -(\gamma-1)\log V + D \Leftrightarrow \log TV^{\gamma-1} = 一定$

問2

状態1 $p_1V_1 = RT_1$

断熱膨張 ↓ $0 = W_{12}^{(負)} + C_V(T_2-T_1)$, $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$

状態2 $p_2V_2 = RT_2$

定積 ↓ $Q = 0 + C_V(T_3-T_2)$

状態3 $p_3V_2 = RT_3$

断熱縮 ↓ $0 = W_{34}^{(正)} + C_V(T_4-T_3)$, $T_3V_2^{\gamma-1} = T_4V_1^{\gamma-1}$

状態4 $p_4V_1 = RT_4$

定積 ↓ $Q_{41} = 0 + C_V(T_1-T_4)$

(6) $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$ より $T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$ だから

$\Delta U_{12} = C_V(T_2-T_1) = \mathbf{C_VT_1\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}-1\right)}$

(7) $T_3V_2^{\gamma-1} = T_4V_1^{\gamma-1}$ より $T_3 = T_4\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$ だから

$Q = C_V(T_3-T_2) = \mathbf{C_V(T_4-T_1)\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}$

(8) $W' = Q + Q_{41} = C_V(T_4-T_1)\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} + C_V(T_1-T_4)$

$= \mathbf{C_V(T_4-T_1)\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}-1\right)}$

(9) $e = \frac{W'}{Q} = \frac{C_V(T_4-T_1)\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}-1\right)}{C_V(T_4-T_1)\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}} = \mathbf{1-\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}}$

(12) 気体の(持つ)内部エネルギーは(気体分子の行っている)熱運動のエネルギーの総和であり. 2原子分子は(単振子分子と異なって)回転のエネルギーを有するため.
同じ絶対温度のときのエネルギーが大きくなり.(そのため定積モル比熱は大きくなり)
比熱比が小さくなる.((9)の結果から)比熱比γは小さいと熱効率は大きくなるので
2原子分子を用いた方が熱効率は大きくなる. (121字)