東北学院大 工学部 2023 2/1

1

(1) $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ だから.　$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}}$

(2) $\left(x^3+\frac{3}{x}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} {}_8C_k\, x^{3k}\left(\frac{3}{x}\right)^{8-k} = \sum_{k=0}^{8}\left({}_8C_k\cdot 3^{8-k}\, x^{4k-8}\right)$

上式で定数項となるのは $k=2$ のときで. その係数は ${}_8C_2\cdot 3^{8-2} = \frac{\cancel{8}^{\,4}\cdot 7}{\cancel{2}}\times 3^6 = \mathbf{20412}$

(3) $x<-\frac{3}{2}$ のとき　$-2x-3-x+4=4x \iff x=\frac{1}{7}$ … 不適

$-\frac{3}{2}\leq x\leq 4$ のとき　$2x+3-x+4=4x \iff x=\frac{7}{3}$

$x>4$ のとき　$2x+3+x-4=4x \iff x=-1$ … 不適

よって方程式の解は $x=\boldsymbol{\frac{7}{3}}$

2

(1) 表が3回裏が1回　$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)\times{}_4C_3 = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$

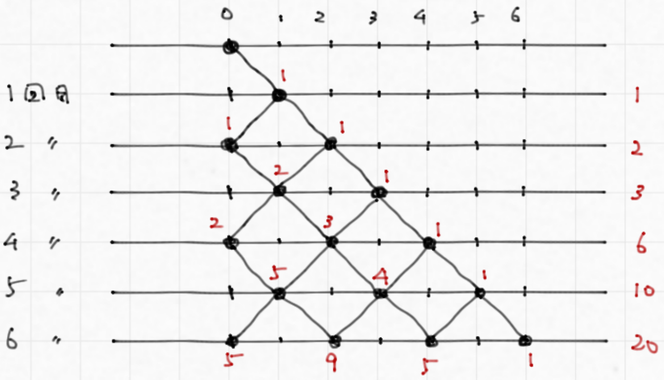
(2) 表を → 裏を ← で表す.

→ → → →　　→ ← → →
→ → → ←　　→ ← → ←
→ → ← →
→ → ← ←

以上の6通りが考えられる

$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 6 = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$

(3)



$\left(\frac{1}{2}\right)^6\times 20 = \frac{5}{2^4} = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$

3

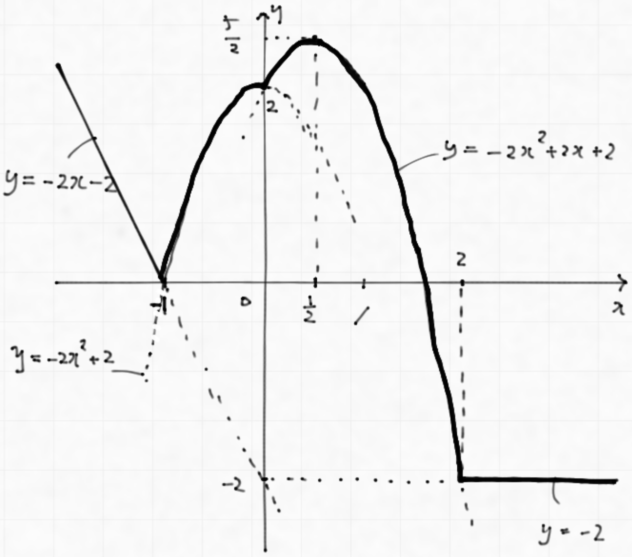
(1) $x^2-x-2 \geqq 0$ となるのは $(x-2)(x+1) \geqq 0$ より $x \leqq -1$ または $x \geqq 2$

(i) $x \leqq -1$ のとき. $f(x) = x^2-x-2-x^2-x = -2x-2$

(ii) $-1 < x \leqq 0$ のとき $f(x) = -(x^2-x-2)-x^2-x = -2x^2+2$

(iii) $0 < x < 2$ のとき $f(x) = -(x^2-x-2)-x^2+x = -2x^2+2x+2 = -2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$

(iv) $x \geqq 2$ のとき $f(x) = x^2-x-2-x^2+x = -2$



$y=0$ となるのは $-2x^2+2x+2=0$ より $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ および $x = -1$

(2) グラフの概形より $y=-2x^2+2$, $y=-2x^2+2x+2$ の 2つに接するものに限られることが分かる $(-2x^2+2)' = -4x$ だから

$-4x = 1$ となるのは $x = -\frac{1}{4}$ だから. $y=-2x^2+2$ に接して傾きが1の直線は

$$y = 1\cdot\left(x+\frac{1}{4}\right)+\left(-2\cdot\frac{1}{4^2}+2\right) = x+\frac{17}{8}$$

これと $y=-2x^2+2x+2$ を連立.

$$-2x^2+2x+2 = x+\frac{17}{8}$$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2-x+\frac{1}{8}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{4}\right)^2=0$

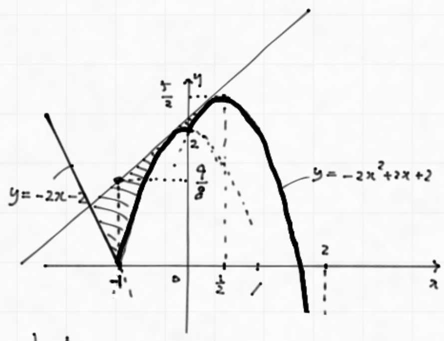
これは この直線 $y=x+\frac{17}{8}$ が $y=-2x^2+2x+2$ にも接していることを示している

よって もとめる直線は $\boldsymbol{y = x+\frac{17}{8}}$

(3) $y=-2x^2+2x+2$ と $y=x+\frac{17}{8}$ の交点の x座標は $x=\frac{1}{4}$

$y=-2x-2$ と $y=x+\frac{17}{8}$ の交点の x座標は $x=-\frac{11}{8}$

面積をもとめる図形は右グラフ斜線部分で 面積を S として



$$S = \frac{1}{2}\times\left(-1+\frac{11}{8}\right)\times\frac{9}{8} + \int_{-1}^{0}\left\{\left(x+\frac{17}{8}\right)-\left(-2x^2+2\right)\right\}dx + \int_{0}^{\frac{1}{4}}\left\{\left(x+\frac{17}{8}\right)-\left(-2x^2+2x+2\right)\right\}dx$$

$$= \frac{27}{128} + \int_{-1}^{0} 2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 dx + \int_{\frac{1}{4}}^{0} 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 dx = \frac{27}{128} + \left[\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)^3\right]_{0}^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{27}{128} + \frac{1}{96} + \frac{27}{96} + \frac{1}{96} = \boldsymbol{\frac{197}{384}}$$