岡山理科大 前期 1/31 IIAB

1 (1) $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k = \frac{6-4}{10} = \frac{1}{5}$

$s^2 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k^2 - \bar{x}^2 = \frac{10}{10} - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$

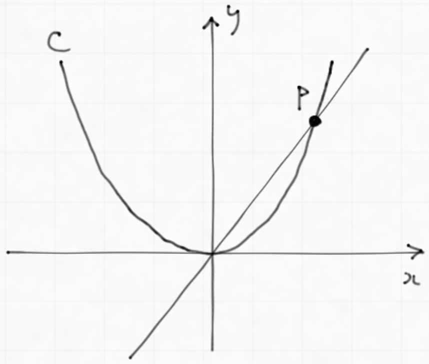
(2) $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k = \frac{n-(10-n)}{10} = \frac{2n-10}{10} = \frac{n-5}{5}$

$s^2 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k^2 - \bar{x}^2 = 1 - \left(\frac{n-5}{5}\right)^2 = \frac{n(10-n)}{25}$

(3) $s^2 = \frac{1}{25}\left(-n^2+10n\right) = -\frac{1}{5}(n-5)^2+1$

$n=5$ で **最大値 1**　$n=0$ または 10 で **最小値 0**

2



(1) $y=x$, $y=2x^2$ を連立

$2x^2=x \iff x(2x-1)=0 \iff x=0,\ \frac{1}{2}$

P は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(2) g の傾きを m として

$y=mx$ と $y=2\sqrt{3}x^2$ の交点は

$mx=2\sqrt{3}x^2 \iff 2\sqrt{3}x\left(x-\frac{m}{2\sqrt{3}}\right)=0 \iff x=0,\ \frac{m}{2\sqrt{3}}$

P は $\left(\frac{m}{2\sqrt{3}}, \frac{m^2}{2\sqrt{3}}\right)$

これが単位円周上にあるので. $OP=1$

$OP^2=\left(\frac{m}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{m^2}{2\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{12}\left(m^2+m^4\right)=1$

$\iff m^4+m^2-12=0 \iff (m^2+4)(m^2-3)=0$

m は正の実数だから $m=\sqrt{3}$ g の傾きは $\sqrt{3}$

(3) C を $y=ax^2$, g を $y=mx$ とおく. a, m は正の実数.

交点は $ax^2=mx$ より $x=0,\ \frac{m}{a}$

P の座標は $\left(\frac{m}{a}, \frac{m^2}{a}\right)$

$OP=1$ を満たすので $1=\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{m^2}{a}\right)^2 \iff m^4+m^2-a^2=0$ …①

$$S=\frac{a}{6}\left(\frac{m}{a}-0\right)^3=\frac{m^3}{6a^2}=\frac{m^3}{6m^4+6m^2} \quad (\because ①)$$

$$=\frac{1}{6\left(m+\frac{1}{m}\right)}$$

ここで相加相乗の公式より $m+\frac{1}{m} \geqq 2\sqrt{m\cdot\frac{1}{m}}=2$ (等号は $m=\frac{1}{m}$. すなわち $m=1$)

が成り立つので

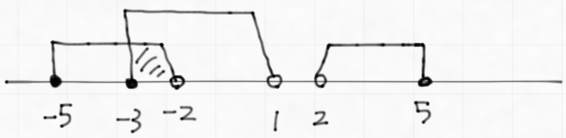
$$S \leqq \frac{1}{6\cdot 2}=\frac{1}{12}$$

$\lim_{m\to\infty} S=0$ だから. S の範囲は $0<S\leqq\frac{1}{12}$

3

(1) $|x+2| \leqq 1 \iff -1 \leqq x+2 \leqq 1 \iff -3 \leqq x \leqq -1$

(2) Aは $-5 \leqq x < -2$ または $2 < x \leqq 5$



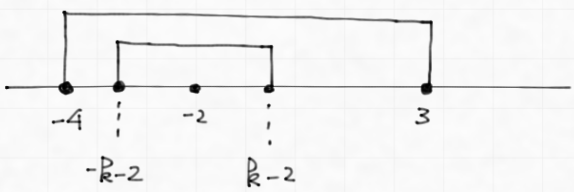
$A \cap B = \{x \mid x は -3 \leqq x < -2\}$

(3) Aは $x^2+x-12 \leqq 0 \iff (x-3)(x+4) \leqq 0 \iff -4 \leqq x \leqq 3$

$k > 0$だから $\sqrt{x^2+4x+4} \leqq k$

$\iff \sqrt{(x+2)^2} \leqq k \iff |x+2| \leqq k$

$\iff -k \leqq x+2 \leqq k \iff -k-2 \leqq x \leqq k-2$



B ⊂ A となるための条件は

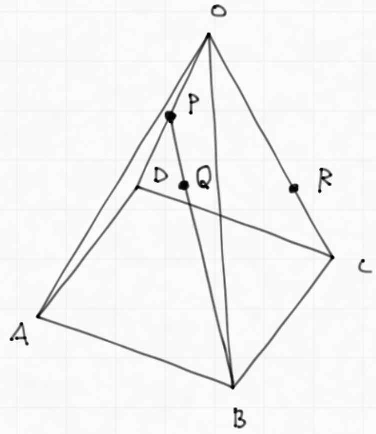
$-4 \leqq -k-2$ かつ $k-2 \leqq 3$ で

$k \leqq 2$ かつ $k \leqq 5$

∴ $k \leqq 2$

以上を整理して $0 < k \leqq 2$ のとき B ⊂ A となる

4



(1) ABCDは平行四辺形だから

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{OD} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{b} \qquad \therefore\ \overrightarrow{OD} = \boldsymbol{\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}$$

(2) $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OP}$

$$= \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \boldsymbol{\frac{3}{8}\vec{a} - \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c}}$$

(3) $\overrightarrow{OR} = t\vec{c}$ と表す

ARとBPの交点をSとすると

Sは AR上にあるので AS:SR $= s : 1-s$ として

$$\overrightarrow{OS} = (1-s)\vec{a} + s\overrightarrow{OR} = (1-s)\vec{a} + st\vec{c} \quad \cdots ①$$

Sは BPを $u : 1-u$ に内分するとして

$$\overrightarrow{OS} = (1-u)\vec{b} + u\overrightarrow{OP} = (1-u)\vec{b} + \frac{1}{2}u(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \quad \cdots ②$$

①②より.

$$1-s = \frac{1}{2}u, \quad 0 = 1-u-\frac{1}{2}u, \quad st = \frac{1}{2}u$$

これらを解いて

$$u = \frac{2}{3},\ s = \frac{2}{3},\ t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OR} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{c}}$$

5

(1) C_2 : $y-q=-(x-p)^2 \iff$ **$y=-(x-p)^2+q$**

(2) C_1 と C_2 を連立

$$x^2=-(x-p)^2+q$$

$$\iff 2x^2-2px+p^2-q=0 \quad \cdots ①$$

判別式をDとすると. $D>0$ のとき C_1 と C_2 は2点で共有する

$$D/4=p^2-2(p^2-q)>0 \iff \boldsymbol{q>\frac{1}{2}p^2}$$

(3) ①の2解を α, β とする ($\alpha<\beta$ とする)

面積が $\frac{1}{3}$ となるので

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}(\beta-\alpha)^3 \iff \beta-\alpha=1$$

①より $\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=\frac{p^2-q}{2}$ だから

$$\beta=\frac{1+p}{2}, \quad \alpha=\frac{p-1}{2}$$

$$\frac{p^2-q}{2}=\frac{p-1}{2}\times\frac{p+1}{2} \iff q=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}$$

これは(1)を満たしている $\therefore$ **$q=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}$**

(4) $M(X, Y)$ として

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{p}{2}, \quad Y=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\frac{1}{2}p^2-\frac{p^2-q}{2}=\frac{1}{2}q$$

(3)の結果に代入

$$2Y=\frac{1}{2}(2X)^2+\frac{1}{2} \iff Y=X^2+\frac{1}{4}$$

Mの軌跡は **$y=x^2+\frac{1}{4}$**