2023 大阪公立大学 前期

1 (1) n回の勝負中、Aが m回勝ち、残りの $n-m$ 回は負けまたは引き分け

$$x_{n,m} = \left(\frac{1}{3}\right)^m\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m} \times {}_nC_m = \frac{{}_nC_m \cdot 2^{n-m}}{3^n}$$

(2) Bの位置について

(i) 1段登るのは グーまたチョキ で勝つ　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

(ii) 3段 〃 パーで勝つ　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

(iii) 同じ段にとどまる　引き分け、または グー、チョキで負け　$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

(iv) 1番下に戻る　パーで負ける　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

2回のゲームが終わったときは、$m = 0, 1, 2, 3, 4, 6$ の可能性がある　他は全て 0

$m=6$　(ii)×2　$y_6 = \left(\frac{1}{9}\right)\times\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{81}$

$m=4$　(i),(ii)　$y_4 = \left(\frac{2}{9}\right)\times\left(\frac{1}{9}\right)\times {}_2C_1 = \frac{4}{81}$

$m=3$　(ii)(iii), (iv)→(ii)　$y_3 = \frac{1}{9}\times\frac{5}{9}\times {}_2C_1 + \frac{1}{9}\times\frac{1}{9} = \frac{11}{81}$

$m=2$　(i)(i)　$y_2 = \frac{2}{9}\times\frac{2}{9} = \frac{4}{81}$

$m=1$　(i)(iii) または 1回目に(iv) 2回目(i)

$$y_1 = \frac{2}{9}\times\frac{5}{9}\times {}_2C_1 + \frac{1}{9}\times\frac{2}{9} = \frac{22}{81}$$

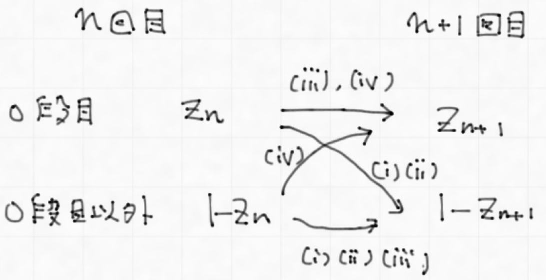
$m=0$　(iii)(iii)、(iv)(iii)、2回目に(iv)

$$y_0 = \frac{5}{9}\times\frac{5}{9} + \frac{1}{9}\times\frac{5}{9} + 1\times\frac{1}{9} = \frac{39}{81}$$

$$y_0 = \frac{39}{81},\ y_1 = \frac{22}{81},\ y_2 = \frac{4}{81},\ y_3 = \frac{11}{81},\ y_4 = \frac{4}{81},\ y_6 = \frac{1}{81}\quad y_5 = 0$$

$$y_m = 0\quad (m \geqq 7)$$

(3)



$$z_{n+1} = \left(\frac{5}{9}+\frac{1}{9}\right)z_n + \frac{1}{9}(1-z_n) = \frac{5}{9}z_n + \frac{1}{9}$$

$$z_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{5}{9}\left(z_n - \frac{1}{4}\right)$$

$$z_n - \frac{1}{4} = \left(\frac{5}{9}\right)^n\left(z_0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{5}{9}\right)^n \qquad \therefore\ z_n = \frac{3}{4}\left(\frac{5}{9}\right)^n + \frac{1}{4}$$

2

(1) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく $(0\leqq\theta<2\pi,\ r\geqq0$ とする$)$

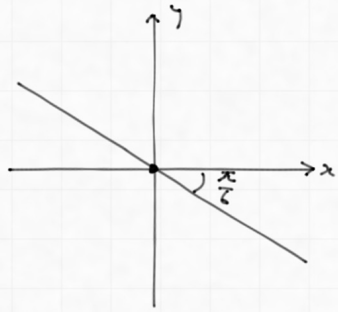
$$(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})\bar{z}=(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))\times r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

$$=r(\cos(-\theta-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\theta-\frac{\pi}{3}))$$

であり、これが z と等しいので、

$$\theta=-\theta-\frac{\pi}{3}+2\pi\times k \quad (k\text{は整数}) \quad \text{または } r=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta=k\pi-\frac{\pi}{6} \quad \text{または } r=0$$



このとき z は右図の直線上の点であり、l は直線であることが示された。

(2) l 上の点の1つとして $2(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))=\sqrt{3}-i$ を考える。(これを α とする)

l が実軸と重なるように w を回転し、実軸に関して折り返し、その後 l が元に戻るように回転させる

$$\overline{\left(\frac{w}{\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)}\right)}\times\frac{\alpha}{|\alpha|}=\frac{\bar{w}}{\bar{\alpha}}\alpha=\frac{\alpha^2\bar{w}}{|\alpha|^2}=\frac{(2-2\sqrt{3}i)\bar{w}}{4}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\bar{w}$$

(3) $\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ とする

$$z_1=(z-1)\omega+1, \quad z_2=z_1\omega$$

$$f(z)=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\bar{z}_2=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\bar{z}_1\bar{\omega}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}(\bar{z}\bar{\omega}^2-\bar{\omega}^2+\bar{\omega})$$

$$=(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))(\bar{\omega}^2\bar{z}-\bar{\omega}^2+\bar{\omega})$$

$$=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\bar{z}-(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})+\cos\pi+i\sin\pi$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\bar{z}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-1=\boldsymbol{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\bar{z}-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

(4) $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\bar{z}-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-z-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

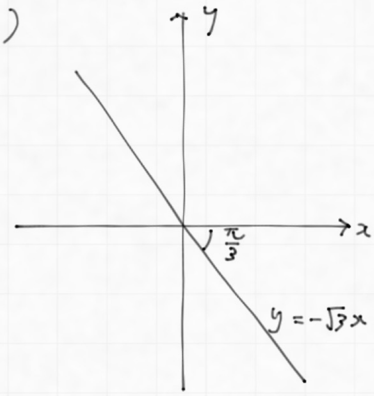
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))=(\cos\pi+i\sin\pi)r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$r(\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{3}-\theta))=r(\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta))$$

$r\neq0$ のとき $\frac{\pi}{3}-\theta=\pi+\theta+2k\pi$ (kは整数)

$$\theta=-\frac{\pi}{3}-k\pi$$



これは z が原点を通って傾き $\tan(-\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$ の直線 $y=-\sqrt{3}x$ 上に存在することを意味している

$r=0$ のとき、z は原点で、これも $y=-\sqrt{3}x$ 上にある。もとめる図形は右のようになる

3

(1) $左辺 = \int_a^b (b-x)(x-a) f''(x)\,dx$

$= \Big[(b-x)(x-a)f'(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\{(-1)(x-a)+(b-x)\cdot 1\}\,dx$

$= \int_a^b (2x-a-b) f'(x)\,dx$

$= \Big[f(x)(2x-a-b)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\times 2\,dx$

$= (b-a)f(b) - (a-b)f(a) - 2\int_a^b f(x)\,dx$

$= (b-a)(f(a)+f(b)) - 2\int_a^b f(x)\,dx \quad = 右辺$

証明終

(2) (1)で. $f(x)=\log x$, $a=t$, $b=t+1$ とする. ($このとき\ f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2}$)

$$\int_t^{t+1}(t+1-x)(x-t)\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = (t+1-t)\left(\log t+\log(t+1)\right) - 2\int_t^{t+1}\log x\,dx$$

$$\int_t^{t+1}\frac{(x-t)(x-t-1)}{x^2}dx = \log t+\log(t+1) - 2\int_t^{t+1}\log x\,dx$$

$$\int_t^{t+1}\log x\,dx - \frac{1}{2}\left(\log t+\log(t+1)\right) = -\frac{1}{2}\int_t^{t+1}\frac{(x-t)(x-t-1)}{x^2}dx \quad \cdots ①$$

$g(x)=\dfrac{(x-t)(x-t-1)}{x^2}$ とおく

$g'(x)=\dfrac{(2t+1)x-2t(t+1)}{x^3}$ だから $g'(x)=0$ となるのは $x=\dfrac{2t(t+1)}{2t+1}$

$\dfrac{2t(t+1)}{2t+1}-t=\dfrac{t}{2t+1}>0$, $\quad \dfrac{2t(t+1)}{2t+1}-(t+1)=\dfrac{-t-1}{2t+1}<0$

なので $t<\dfrac{2t(t+1)}{2t+1}<t+1$ であり, $g(x)$の増減は右のようになる

x	t	$\cdots$	$\frac{2t(t+1)}{2t+1}$	$\cdots$	$t+1$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘		↗	0

よって $t\leqq x\leqq t+1$ において $g(x)\leqq 0$ (等号は $x=t, t+1$)

よって $\int_t^{t+1}g(x)\,dx\leqq 0$ であり $-\frac{1}{2}\int_t^{t+1}g(x)\,dx\geqq 0$

①と併せて $0\leqq\int_t^{t+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(\log t+\log(t+1))$ が示された.

$$g\left(\frac{2t(t+1)}{2t+1}\right)=\frac{\frac{t}{\cancel{2t+1}}\times\frac{-t-1}{\cancel{2t+1}}}{\frac{4t^2(t+1)^2}{\cancel{(2t+1)^2}}}=\frac{-1}{4t(t+1)}$$

$g(x)$の増減より $t\leqq x\leqq t+1$ において $g(x)\geqq g\left(\frac{2t(t+1)}{2t+1}\right)=\frac{-1}{4t(t+1)}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)$

だから $-\frac{1}{2}\int_t^{t+1}g(x)\,dx\leqq-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)$

①と併せて $\int_t^{t+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(\log t+\log(t+1))\leqq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)$ が示された.

証明終

(3) (2) の式で $t=1, 2, 3, \cdots, n-1$ としたものを辺々加えると、

$$0 \leqq \int_1^2 \log x\,dx + \int_2^3 \log x\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n \log x\,dx$$

$$-\frac{1}{2}(\log 1 + \log 2) - \frac{1}{2}(\log 2 + \log 3) + \cdots - \frac{1}{2}(\log(n-1) + \log n) \leqq \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$0 \leqq \int_1^n \log x\,dx - (\log 2 + \log 3 + \cdots + \log(n-1)) - \frac{1}{2}\log 1 - \frac{1}{2}\log n \leqq \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$0 \leqq [x\log x - x]_1^n - (\log 1 + \log 2 + \cdots + \log n) + \frac{1}{2}\log 1 + \frac{1}{2}\log n \leqq \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$0 \leqq n\log n - n - 0 + 1 - \log(n!) + 0 + \frac{1}{2}\log n \leqq \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$0 \leqq -a_n + 1 + \frac{1}{2}\log n \leqq \frac{1}{8} - \frac{1}{8n}$$

$$1 + \frac{1}{2}\log n - \frac{1}{8} + \frac{1}{8n} \leqq a_n \leqq 1 + \frac{1}{2}\log n$$

$$\frac{7}{8\log n} + \frac{1}{8n\log n} + \frac{1}{2} \leqq \frac{a_n}{\log n} \leqq \frac{1}{\log n} + \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{8\log n} + \frac{1}{8n\log n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \cdots ③$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \cdots ④$$

② ③ ④ より、はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n} = \frac{1}{2}$

4

(1) ${}_pC_j = \dfrac{p!}{j!(p-j)!}$ は整数値

分子は素数pを素因数にもつが、分母はpより小さい自然数の積なので pを素因数に持たない。したがって ${}_pC_j$ は p を素因数にもち、pで割り切れる。

(2) 以下、合同式は全て p を法とする。

$$(m+1)^p - m^p - 1 = {}_pC_0 m^p + {}_pC_1 m^{p-1} + {}_pC_2 m^{p-2} + \cdots {}_pC_{p-1} m + {}_pC_p - m^p - 1$$

$$\equiv {}_pC_0 m^p - {}_pC_p - m^p - 1 \quad (\because (1))$$

$$\equiv m^p - 1 - m^p - 1 \quad \equiv 0$$

よって $(m+1)^p - m^p - 1$ は p で割り切れる

(3) (i) $m=1$ のとき、

$1^p - 1 = 0$ だから p で割り切れる

(ii) $m=k$ のとき、

$k^p - k \equiv 0$ と仮定する

このとき

$$(k+1)^p - (k+1) \equiv (k^p+1) - (k+1) \quad (\because (2) より\ (k+1)^p - k^p - 1 \equiv 0)$$

$$\equiv k + 1 - k - 1 \quad (\because 仮定)$$

$$\equiv 0$$

よって $m=k$ のときに $k^p - k$ が p で割り切れれば $m=k+1$ のとき $(k+1)^p - (k+1)$ も pで割り切れる

(i)(ii)より 数学的帰納法により全ての自然数 m に対し、$m^p - m$ は pで割り切れる。

$m^p - m = m(m^{p-1} - 1) \equiv 0$ だから

右辺で m が pで割り切れないとき、$m^{p-1} - 1$ が p で割り切れる。

(4) $a = 4n^2 + 4n - 1 = (2n+1) \times 2n + 2n - 1$

a と $2n+1$ の最大公約数は $2n+1$ と $2n-1$ の最大公約数と等しい

$2n+1 = (2n-1) + 2$ だから

$2n+1$ と $2n-1$ の最大公約数は $2n-1$ と 2 の最大公約数と等しい

$2n-1$ は奇数なので、$2n-1$ と 2 の最大公約数は 1

よって a と $2n+1$ の最大公約数は 1、すなわち 2つの数は互いに素である。

(5) p は3以上の素数だから奇数で、$p=2q+1$ と表すことができる（q は自然数）

条件と(4)より $a=4n^2+4n-1 \equiv 0$ のとき $2n+1 \not\equiv 0$ となる n が存在する

$$4n^2+4n-1 = (2n+1)^2-2 \equiv 0 \iff (2n+1)^2 \equiv 2$$

$2n+1 \not\equiv 0$ だから(3)より

$$(2n+1)^{p-1}-1 \equiv 0$$

$$(2n+1)^{2q}-1 \equiv 0$$

ここで $(2n+1)^2 \equiv 2$ だから

$$2^{q}-1 \equiv 0$$

$$2^{\frac{p-1}{2}}-1 \equiv 0$$

証明終