神戸大学2023前期

1

(1) (i) $x \leqq 1$ のとき　$f(x) - x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}(1-x) \geqq 0$　$(\because x \leqq 1)$

(ii) $x > 1$ のとき　$f(x) - x = 2x - 1 - x = x - 1 > 0$　$(\because x > 1)$

(i)(ii) より すべての実数 x について $f(x) \geqq x$ が成り立っている

(2) (i) $n = 1$ のとき　条件より $a_1 = a \leqq 1$

(ii) $n = k$ のとき.

$a_k \leqq 1$ が成り立つと仮定する.

このとき

$$
\begin{aligned}
1 - a_{k+1} &= 1 - f(a_k) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}(1 - a_k) \geqq 0 \quad (\because \text{仮定より } a_k \leqq 1)
\end{aligned}
$$

よって仮定の下で $a_{k+1} \leqq 1$ が成り立つ.

(i)(ii) より 数学的帰納法より $a \leqq 1$ のとき、全ての正の整数 n について $a_n \leqq 1$ が成り立つ

(3) $a > 1$ のとき.

$a_k > 1$ が成り立つとき (1) より $a_{k+1} = f(a_k) \geqq a_k$ だから $a_{k+1} > 1$

よって数学的帰納法より $a > 1$ のとき、全ての正の整数 n について $a_n > 1$ が成り立つ

(i) $a \leqq 1$ のとき

(2) より $a_{n+1} = f(a_n) = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2} \iff a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1)$

これは数列 $\{a_n - 1\}$ が初項 $a - 1$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列となることを示しているので.

$$a_n - 1 = (a-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \therefore a_n = \frac{a-1}{2^{n-1}} + 1$$

(ii) $a > 1$ のとき.

先の考察より $a_{n+1} = f(a_n) = 2a_n - 1 \iff a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$

これは数列 $\{a_n - 1\}$ が初項 $a - 1$, 公比 2 の等比数列となることを示しているので.

$$a_n - 1 = (a-1)\cdot 2^{n-1} \qquad \therefore a_n = (a-1)2^{n-1} + 1$$

(i)(ii) より

$$
a_n = \begin{cases} (a-1)\cdot 2^{1-n} + 1 & (a \leqq 1) \\ (a-1)2^{n-1} + 1 & (a > 1) \end{cases}
$$

2

(1) $f(x)=(x+\frac{a}{2})^2-\frac{1}{4}a^2+b$ より $y=f(x)$ の軸は $x=-\frac{a}{2}$

$f(x)=0$ の判別式をDとする.

$f(x)=0$ が異なる2つの正の解を持つ条件は.

軸が $x>0$ の範囲にある $-\frac{a}{2}>0$

判別式が正 $D=a^2-4b>0$

端点 $f(0)$ が正 $f(0)=b>0$

以上の条件を整理して **$b<\frac{1}{4}a^2,\ a<0.\ b>0$**

(2) (i) 実数解をもつとき

(1)と同様 $-\frac{a}{2}<0$, $D=a^2-4b\geqq 0$, $f(0)=b>0$

整理して $b\leqq\frac{1}{4}a^2$, $a>0$. $b>0$

(ii) 虚数解をもつとき.

$D<0.\quad\Leftrightarrow\quad b>\frac{1}{4}a^2$

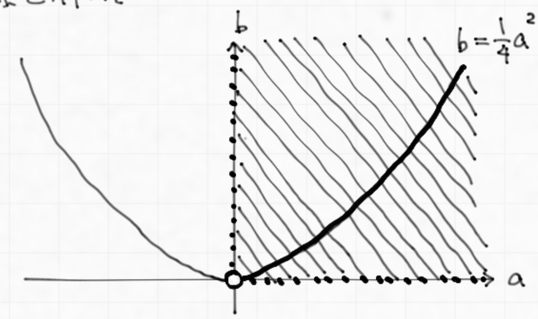
2解は共役な複素数で実部は同じ値をとる

2解は α, $\bar{\alpha}$ と表せ. その実部は. 解と係数の関係を用いて

$\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}=-\frac{a}{2}<0\quad\Leftrightarrow\quad a>0$

以上を図示

右図斜線部(境界除く)



(3) (i) 実数解をもつとき

$-1<-\frac{a}{2}<0$, $D=a^2-4b\geqq 0$, $f(0)=b>0$, $f(-1)=1-a+b>0$

$\Leftrightarrow\quad 0<a<2$, $b\leqq\frac{1}{4}a^2$. $b>0$, $b>a-1$

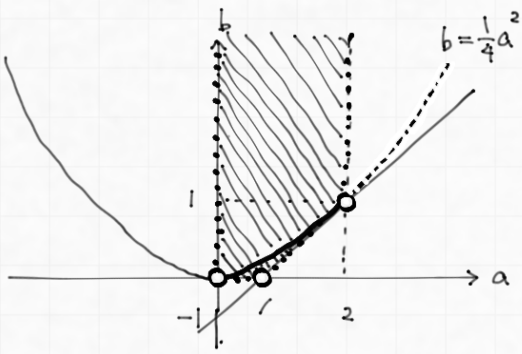
(ii) 虚数解をもつとき.

$D<0.\quad\Leftrightarrow\quad b>\frac{1}{4}a^2$

$-1<-\frac{a}{2}<0\quad\Leftrightarrow\quad 0<a<2$

以上を図示

右図斜線部(境界除く)



3

(1) カードの取り出し方は ${}_{2n}C_2$ 通り.

和が偶数となるのは 2枚の奇数を選んだときと. 2枚の偶数を選んだとき.

$$\frac{{}_nC_2+{}_nC_2}{{}_{2n}C_2}=\frac{n(n-1)\times 2}{2n(2n-1)}=\mathbf{\frac{n-1}{2n-1}}$$

(2) $n\geqq 3$ のとき.

和が偶数となるのは 3枚とも偶数のとき. または. 1枚偶数2枚奇数のとき.

$$\frac{{}_nC_3+{}_nC_1\cdot{}_nC_2}{{}_{2n}C_3}=\frac{3\cdot 2\cdot 1\left(\frac{\cancel{n(n-1)}(n-2)}{3\cdot 2}+\cancel{n}\cdot\frac{\cancel{n(n-1)}}{2}\right)}{2\cancel{n}(2n-1)\cancel{(2n-2)}\ 2}=\frac{n-2+3n}{4(2n-1)}=\frac{2n-1}{2(2n-1)}=\frac{1}{2}$$

$n=2$ のとき

和が偶数となるのは 1枚偶数2枚奇数のとき.

$$\frac{{}_2C_1\times{}_2C_2}{{}_4C_3}=\frac{1}{2}$$

以上より. もとめる確率は $\mathbf{\frac{1}{2}}$

(3) 余事象を考える.

和が $2k$ $(2\leqq k\leqq n)$ となるカードの組み合わせは

$(1,2k-1),(2,2k-2),\cdots(k-1,k+1)$ の $k-1$ 通り.

和が $2k-1$ $(2\leqq k\leqq n)$ となるカードの組み合わせは

$(1,2k-2),(2,2k-3),\cdots(k-1,k)$ の $k-1$ 通り.

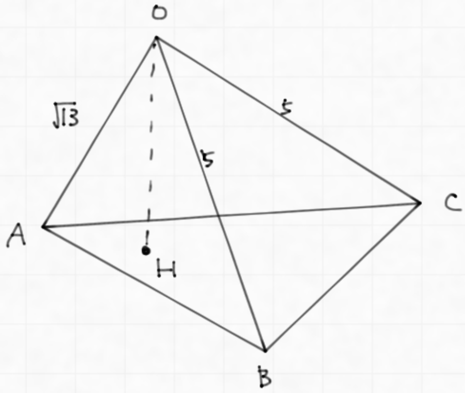
したがって和が $2n$ 以下になるカードの組み合わせは.

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)+\sum_{k=2}^{n}(k-1)=2\sum_{k=1}^{n-1}k=2\times\frac{1}{2}(n-1)n=n(n-1)$$

よって和が $2n+1$ となる確率は

$$1-\frac{n(n-1)}{{}_{2n}C_2}=1-\frac{\cancel{2}\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}\cancel{n}(2n-1)}=\mathbf{\frac{n}{2n-1}}$$

4



(1) $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ と表す.

$|\vec{a}|=\sqrt{13}$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=5$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=1$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=-11$

$|\vec{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=25-2\cdot1+13=36$

$|\vec{AB}|=\mathbf{6}$

(2) $\vec{OH}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$

$\vec{OH}\cdot\vec{AB}=0$ だから

$((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=1-s-t-13(1-s-t)+25s-s-11t-t$

$=-12+36s=0$ $\quad s=\frac{1}{3}$

$\vec{OH}\cdot\vec{AC}=0$ だから

$((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=1-s-t-13(1-s-t)-11s-s+25t-t$

$=-12+36t=0$ $\quad t=\frac{1}{3}$

$\therefore (s,t)=\mathbf{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}$

(3) $|\vec{AC}|=6$.

$|\vec{BC}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=25+25+22=72$ $\quad |\vec{BC}|=6\sqrt{2}$

△ABC は AB=AC の直角二等辺三角形で面積は $\frac{1}{2}\times6\times6=18$

$|\vec{OH}|^2=|\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{9}(13+25+25+2+2-22)=5$

$|\vec{OH}|=\sqrt{5}$

四面体の体積は $18\times\sqrt{5}\times\frac{1}{3}=\mathbf{6\sqrt{5}}$

5　$x=\sin t$，　$y=\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t$　$(0\leqq t\leqq\pi)$

(1) $\frac{dx}{dt}=\cos t=0$ となるのは $t=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

$$\frac{dy}{dt}=-\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t+\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\cos t$$

$$=-\left(\sin t\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos t\times\frac{1}{2}\right)\sin t+\left(\cos t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin t\cdot\frac{1}{2}\right)\cos t$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos^2 t-\sin^2 t)+\cos t\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t=\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$\frac{dy}{dt}=0$ となるのは　$2t+\frac{\pi}{3}=\pi,\ 2\pi$　すなわち　$t=\boldsymbol{\frac{1}{3}\pi,\ \frac{5}{6}\pi}$

(2) Cの増減は次のようになる

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
(x,y)		↗		↘		↙		↖	

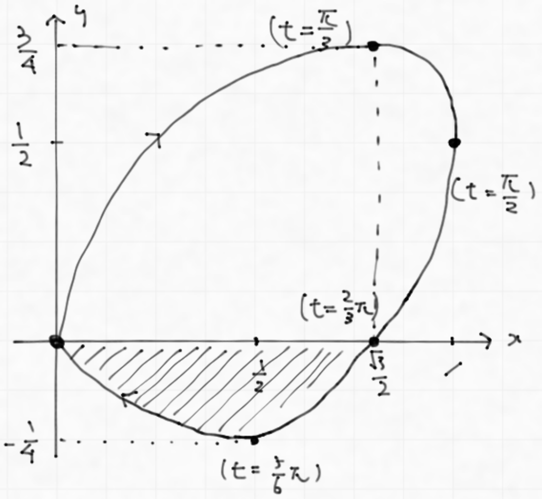
$t=0$ のとき　$(x,y)=(0,0)$

$t=\frac{\pi}{3}$ のとき　$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}\right)$

$t=\frac{\pi}{2}$ のとき　$(x,y)=\left(1,\frac{1}{2}\right)$

$t=\frac{5}{6}\pi$ のとき　$(x,y)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$

$t=\pi$ のとき　$(x,y)=(0,0)$



$y=0$ を解くと．$t=0,\ \pi,\ \frac{2}{3}\pi$

Cの概形は左のとおり．

(3) 上グラフ斜線部分（面積をSとする）

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}|y|\,dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t\,dx=\int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right)\sin t\cos t\,dt$$

$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 t\sin t+\frac{1}{2}\sin^2 t\cos t\right)dt=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}\cos^3 t+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}+0-\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{48}-\frac{3\sqrt{3}}{48}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}}$$