京都工芸繊維大学2023前期

1 (1) $f(x)=\int_{x^2}^{1}\frac{\log t}{t}dt=\int_{x^2}^{1}(\log t)(\log t)'dt=\left[\frac{1}{2}(\log t)^2\right]_{x^2}^{1}=-\frac{1}{2}(2\log x)^2=\mathbf{-2(\log x)^2}$

$g(x)=\int_{x^2}^{1}\frac{\log t}{\sqrt{t}}dt$

$\sqrt{t}=s$ とおく　$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$　$\begin{array}{c|c} t & x^2\to 1 \\ \hline s & x\to 1\end{array}$

（xは開区間$(0,1)$で定義されているので　$\sqrt{x^2}=|x|=x$としてよい）

$g(x)=\int_{x}^{1}\frac{2\log s}{\cancel{s}}\cdot 2\cancel{s}\,ds=4\left[s\log s-s\right]_{x}^{1}=-4-4x\log x+4x$

$g(x)=\mathbf{-4x\log x+4x-4}$

(2) $\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\left(\frac{-4x\log x+4x-4}{-2(\log x)^2}\right)'$

$=\frac{(-4\log x\cancel{-4}\cancel{+4})(-2(\log x)^2)+2\times 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}(-4x\log x+4x-4)}{4(\log x)^{\cancel{4}3}}$

$=\frac{8(\log x)^2-16\log x+16-\frac{16}{x}}{4(\log x)^3}$

$=\frac{2x(\log x)^2-4x\log x+4x-4}{x(\log x)^3}$ …(*)

$h(x)=2x(\log x)^2-4x\log x+4x-4$ とおく

$h'(x)=2(\log x)^2+4\cancel{x}\log x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}-4\log x\cancel{-4}\cancel{+4}=2(\log x)^2>0$

$h(x)$は単調に増加する

$\lim_{x\to 1-0}h(x)=2\cdot1\cdot0^2-4\cdot1\cdot0+4-4=0$　だから　$0<x<1$で　$h(x)$は常に負

(*)の分母 $x(\log x)^3$ は $0<x<1$で負なので　$0<x<1$で $\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'$は常に正であり

$\frac{g(x)}{f(x)}$ は $0<x<1$で単調に増加する.

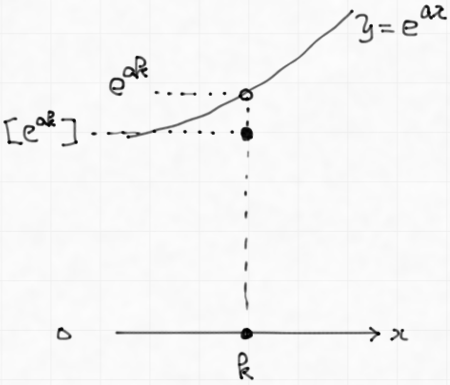
2

(1) $T(n)=\int_0^n e^{ax}dx=\left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_0^n=\frac{1}{a}e^{an}-\frac{1}{a}$

(2) $R(n)=\sum_{k=0}^{n}e^{ak}=e^0\times\frac{e^{a(n+1)}-1}{e^a-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(n)}{e^{an}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^a-\frac{1}{e^{an}}}{e^a-1}=\frac{e^a}{e^a-1}$$

(3)



$x=k$上の格子点は $0,1,2,\cdots[e^{ak}]$ の $[e^{ak}]+1$ 個

また $[e^{ak}]\leqq e^{ak}<[e^{ak}]+1$ より

$$e^{ak}-1<[e^{ak}]\leqq e^{ak}$$

$$S(n)=\sum_{k=0}^{n}\left([e^{ak}]+1\right)\leqq\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ak}+1\right)=R(n)+n+1$$

$$S(n)=\sum_{k=0}^{n}\left([e^{ak}]+1\right)>\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ak}-1+1\right)=R(n)$$

したがって

$$\frac{R(n)}{T(n)}<\frac{S(n)}{T(n)}\leqq\frac{R(n)+n+1}{T(n)}\quad\cdots①$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(n)}{T(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{an+a}-1}{e^a-1}}{\frac{e^{an}-1}{a}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(e^a-\frac{1}{e^{an}}\right)}{(e^a-1)\left(1-\frac{1}{e^{an}}\right)}=\frac{ae^a}{e^a-1}\quad\cdots②$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(n)+n+1}{T(n)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{e^{an+a}-1}{e^a-1}}{\frac{e^{an}-1}{a}}+\frac{n+1}{\frac{e^{an}-1}{a}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a\left(e^a-\frac{1}{e^{an}}\right)}{(e^a-1)\left(1-\frac{1}{e^{an}}\right)}+\frac{a\left(\frac{n}{e^{an}}+\frac{1}{e^{an}}\right)}{1-\frac{1}{e^{an}}}\right)$$

$$=\frac{ae^a}{e^a-1}+0=\frac{ae^a}{e^a-1}\quad\cdots③$$

①②③よりはさみうちの原理より.

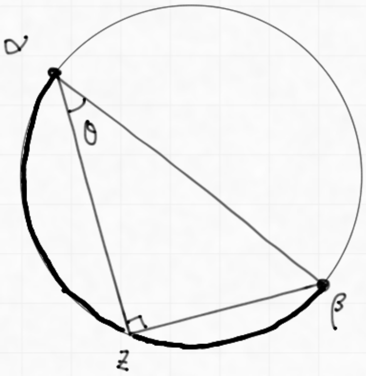
$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(n)}{T(n)}=\frac{ae^a}{e^a-1}$$

3

(1) $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ の偏角が $-\dfrac{\pi}{2}$ だから zは 2点 α, β を直径とする円周上を動く

$\arg\left(\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ より $\arg(\beta - z) + \dfrac{\pi}{2} = \arg(\alpha - z)$

であり zは 左図の半円周上(太線部)にある.

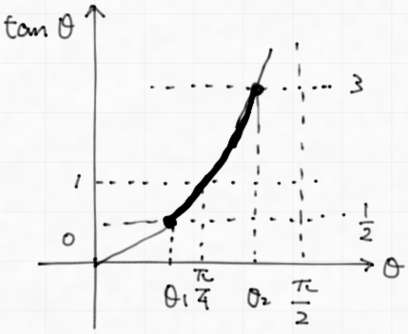


左図の角を θ, $|\beta-\alpha| = l$ と表すと.

$|z-\alpha| = l\cos\theta$, $|z-\beta| = l\sin\theta$

であり

$$\left|\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right| = \frac{|z-\beta|}{|z-\alpha|} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$



条件より $\dfrac{1}{2} \leqq \tan\theta \leqq 3$

$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ となる θ を θ_1 $\tan\theta = 3$ となる θ を θ_2 とすると.

$$\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$$

$$|z-\alpha| + |z-\beta| = l\cos\theta + l\sin\theta = \sqrt{2}\,l\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

これは, $\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき $|z-\alpha| + |z-\beta|$ は最大となり

これは ① の範囲に含まれている.

$$\sin\left(\theta_1 + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\theta_1 + \sin\theta_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\theta_2 + \sin\theta_2 = \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\dfrac{4}{\sqrt{10}}\right)^2 = \dfrac{9}{5} - \dfrac{16}{10} = \dfrac{1}{5} > 0$ だから $\sin\left(\theta_2 + \dfrac{\pi}{4}\right) < \sin\left(\theta_1 + \dfrac{\pi}{4}\right)$

以上より

$$\frac{4}{\sqrt{10}} \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$$

$$\frac{4}{\sqrt{10}}\,l \leqq \sqrt{2}\,l\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}\,l$$

$$\boldsymbol{\frac{4}{\sqrt{10}}|\beta-\alpha| \leqq |z-\alpha| + |z-\beta| \leqq \sqrt{2}\,|\beta-\alpha|}$$

(2) (1) より $\left|\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}\right| = 3$

$$z - \beta = (z-\alpha) \times 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -3i(z-\alpha)$$

$$z + 3iz = \beta + 3\alpha i$$

$$z = \frac{\beta + 3\alpha i}{1+3i} = \frac{(\beta+3\alpha i)(1-3i)}{1+3^2} = \frac{1}{10}(\beta - 3\beta i + 3\alpha i + 9\alpha) = \boldsymbol{\frac{9\alpha + \beta + 3(\alpha-\beta)i}{10}}$$

4

$t-x=s$ とおく　$\dfrac{ds}{dt}=1$

t	$x \to 2x$
s	$0 \to x$

$$f(x)=\int_0^x \sin(s+x)e^{-s^2}ds=\int_0^x(\sin s\cos x+\cos s\sin x)e^{-s^2}ds$$

$$=\cos x\int_0^x \sin s\, e^{-s^2}ds+\sin x\int_0^x \cos s\ e^{-s^2}ds$$

両辺をxで微分する

$$f'(x)=-\sin x\int_0^x \sin s\, e^{-s^2}ds+\cos x\sin x\, e^{-x^2}+\cos x\int_0^x\cos s\, e^{-s^2}ds+\sin x\cos x\, e^{-x^2}$$

$$=-\sin x\int_0^x \sin s\, e^{-s^2}ds+\cos\int_0^x\cos s\cdot e^{-s^2}ds+\sin 2x\cdot e^{-x^2}$$

両辺をxで微分する

$$f''(x)=-\cos x\int_0^x \sin s\, e^{-s^2}ds-\sin^2 x\, e^{-x^2}-\sin x\int_0^x\cos s\, e^{-s^2}ds+\cos^2 x\, e^{-x^2}+\frac{1}{2}\cos 2x\, e^{-x^2}-2x\sin 2x\, e^{-x^2}$$

$$=-f(x)+e^{-x^2}\left(-\sin^2 x+\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos 2x-2x\sin 2x\right)$$

$$f(x)+f''(x)=e^{-x^2}\left(\frac{3}{2}\cos 2x-2x\sin 2x\right)$$

$f(x)+f''(x)=0$となるのは　$3\cos 2x-4x\sin 2x=0$　となるときで

$$3\cos 2x=4x\sin 2x$$

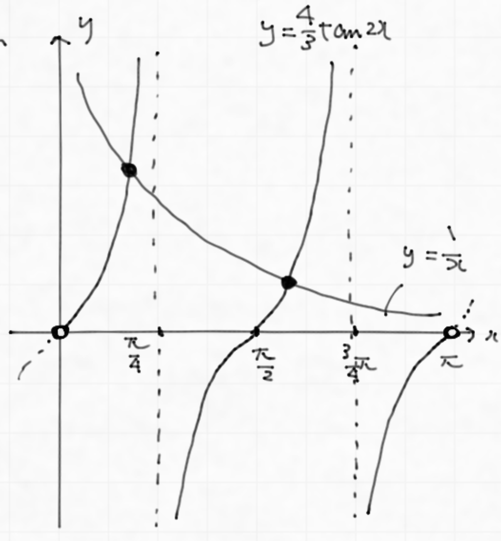
$\cos 2x=0$となるとき．$\left(x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3}{4}\pi\text{のとき}\right)$上式は成立しない

$\cos 2x\neq 0$のとき．

$$\frac{1}{x}=\frac{4}{3}\tan 2x$$

$y=\dfrac{4}{3}\tan 2x$のグラフは右のとおりであり．

$y=\dfrac{1}{x}$のグラフとの交点は図中の2つ



以上より　$0<x<\pi$の範囲で$f(x)+f''(x)=0$の

解の個数は2つ