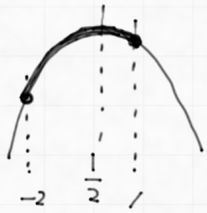
1

(1) $(x-1)(x+3)(x+4)(x-8)(x+9)(x-10)$

$= x^6 + (-10+9-8+4+3-1)x^5 + \cdots$

$= x^6 - 3x^5 + \cdots$

(2) $y = -4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 9$



$x=\frac{1}{2}$ で最大値 **9**

$x=-2$ で最小値 **−16**

(3) $(\log_3 8 + \log_9 4)(\log_2 27 - \log_4 9)$

$= \left(\frac{3}{\log_2 3} + \frac{2}{2\log_2 3}\right)\left(3\log_2 3 - \frac{2\log_2 3}{\cancel{2}}\right)$

$= \frac{8}{2\log_2 3} \times 2\log_2 3 = \mathbf{8}$

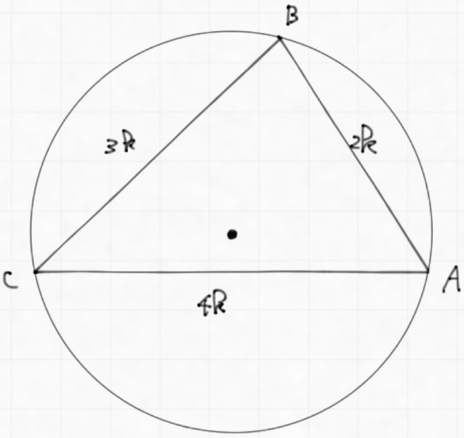
(4)

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 2 & 3 & 4 \\
2 & -1 \,\Big) & 4 & 4 & 5 & 1 \\
 & & 4 & -2 & & \\ \hline
 & & & 6 & 5 & \\
 & & & 6 & -3 & \\ \hline
 & & & & 8 & 1 \\
 & & & & 8 & -4 \\ \hline
 & & & & & 5
\end{array}$$

商 $\mathbf{2x^2+3x+4}$　余り **5**

(5) $_8C_4 \times (4-1)! = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} \times 3\cdot 2 = \mathbf{420}$ 通り.

2



(1) $\cos\angle ABC = \dfrac{AB^2+BC^2-CA^2}{2\cdot AB\cdot BC}$

$$= \frac{4\cancel{R^2}+9\cancel{R^2}-16\cancel{R^2}}{2\cdot 2\cancel{R}\cdot 3\cancel{R}} = -\frac{1}{4}$$

$\sin\angle ABC = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

(2) 正弦定理より

$\dfrac{CA}{\sin\angle ABC} = 2R$ だから $CA = 2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{3}\times\dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{5}{2}$

(3) $CA = \dfrac{5}{2} = 4R$ より $R = \dfrac{5}{8}$

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\times AB\times BC\times\sin\angle ABC$

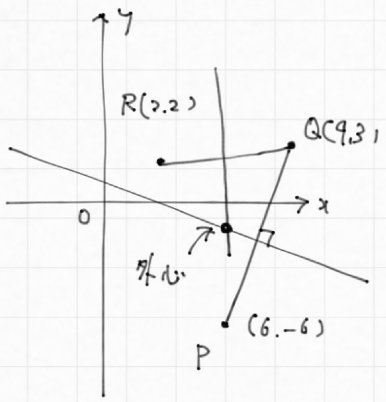
$$= \frac{1}{2}\times 2R\times 3R\times\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3}{4}\times\frac{5^2}{8^2}\times\sqrt{15} = \frac{75}{256}\sqrt{15}$$

3

(1) PQの中点を通ってPQと垂直な直線だから

中点は $\left(\frac{15}{2}, -\frac{3}{2}\right)$　PQの傾きは $\frac{3-(-6)}{9-6}=3$　これと垂直な傾きは $-\frac{1}{3}$

$$y=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{15}{2}\right)-\frac{3}{2}=-\frac{1}{3}x+1$$



(2) 外心は垂直二等分線の交点だから RQの垂直二等分線をもとめる

$$y=-\frac{1}{\left(\frac{3-2}{9-2}\right)}\left(x-\frac{11}{2}\right)+\frac{5}{2}$$

$$=-7x+41$$

(1)の直線と連立　$-\frac{1}{3}x+1=-7x+41$　$x=6,\ y=-1$

中心は $(6,-1)$　この点とPとの距離は5で、これが半径

$$(x-6)^2+(y+1)^2=25$$

(3) 円の中心 $(6,-1)$ と直線 $kx-y-1=0$ との距離が半径の5と等しいときに接する

$$5=\frac{|6k+1-1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}$$

2乗して　$25(k^2+1)=36k^2$

$$k^2=\frac{25}{11}\qquad k=\pm\frac{5\sqrt{11}}{11}$$

4

(1) $a_2 = 3a_1 + 4 = 3 \cdot 2 + 4 = \mathbf{10}$

(2) $\left(\alpha = 3\alpha + 4 \iff \alpha = -2 \right)$

$$a_{n+1} - (-2) = 3(a_n - (-2))$$

$$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$$

$\{a_n + 2\}$ は 初項 $a_1 + 2 = 4$, 公比 3 の 等比数列

したがって一般項は

$$a_n + 2 = 4 \times 3^{n-1}$$

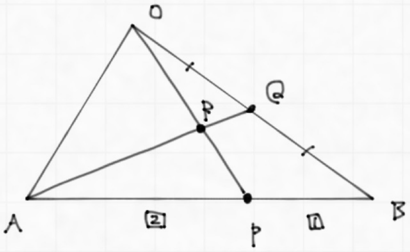
$$a_n = \mathbf{4 \cdot 3^{n-1} - 2}$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(4 \cdot 3^{k-1} - 2 \right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} 4 \cdot 3^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} 2$$

$$= \overset{2}{\cancel{4}} \times \frac{3^n - 1}{\cancel{3-1}} - 2n = 2 \cdot \mathbf{3^n - 2n - 2}$$

5



(1) $\vec{OP} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB}$

(2) $\vec{OQ} = \frac{1}{2}\vec{OB}$

RはAQを1-s:sに内分する点と表すことができる

$\vec{OR} = s\vec{OA} + (1-s)\vec{OQ} = s\vec{OA} + \frac{1}{2}(1-s)\vec{OB}$ …①

RはOP上にあるので

$\vec{OR} = k\vec{OP} = \frac{1}{3}k\vec{OA} + \frac{2}{3}k\vec{OB}$ …②

と表せる

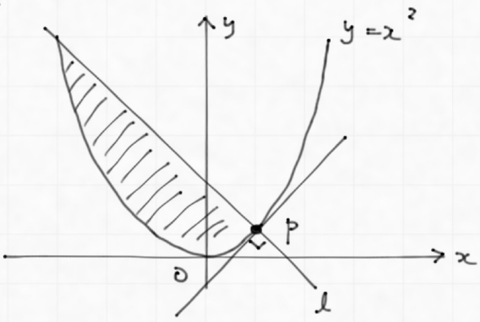
①②より、$\frac{1}{3}k = s$, $\frac{2}{3}k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s$

連立して $s = \frac{1}{5}$, $k = \frac{3}{5}$ $\vec{OR} = \frac{1}{5}\vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{OB}$

(3) $|\vec{OA}| = 1$. $|\vec{OB}| = 2$. $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = 1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ = 1$

$\vec{OB}\cdot\vec{OP} = \vec{OB}\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB}\right) = \frac{1}{3}\vec{OA}\cdot\vec{OB} + \frac{2}{3}|\vec{OB}|^2 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$

6



(1) $y' = 2x$

$x = \frac{1}{2}$ のとき 接線の傾きは 1

l の傾きは -1

$y = -\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$ $\therefore$ $l: y = -x + \frac{3}{4}$

(2) l と C を連立

$x^2 = -x + \frac{3}{4}$ $\therefore x = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$

D の面積 S は

$S = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^3 = \frac{4}{3}$

(3) $m: y = -x + k$ とおく

C と連立して $x^2 + x - k = 0$

この式の解を α, β $(\alpha < \beta)$ とすると $\alpha + \beta = -1$. $\alpha\beta = -k$

$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 + 4k$ だから

$\int_\alpha^\beta (-x + k) - x^2 \, dx = \frac{1}{6}(1 + 4k)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}$

$1 + 4k = 4^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$

$k = \frac{2^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - \frac{1}{4}$