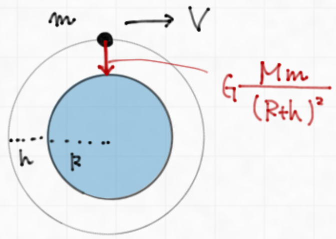
東北大学2023

1



問(1) (a) $F_1 = G\dfrac{Mm}{(R+h)^2}$

(b) 運動方程式 $m\dfrac{V^2}{(R+h)} = F_1$ より $V = \sqrt{G\dfrac{M}{R+h}}$

(c) $T_1 = 2\pi(R+h)\times\dfrac{1}{V} = 2\pi(R+h)\sqrt{\dfrac{R+h}{GM}}$

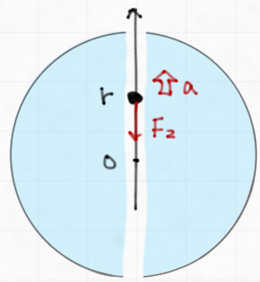
問(2) (a) 半径 R および r の球の体積は $\frac{4}{3}\pi R^3$, $\frac{4}{3}\pi r^3$

地球が一様な密度であるという仮定から質量比が体積比と等しく

$$M' = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}M = \frac{r^3}{R^3}M$$

(b) 半径 r の球の外側の部分がこの位置での重力には無関係との記述から

$$F_2 = G\frac{M'm}{r^2} = G\frac{m}{\cancel{r^2}}\times\frac{r^{\cancel{3}}}{R^3}M = \frac{GrmM}{R^3}$$



(c) 中心から距離 r の位置での運動方程式は

$$ma = -\frac{GmM}{R^3}r \quad \cdots \text{復元力}$$

$$= -mr\omega^2 \quad \text{より} \quad \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\therefore T_2 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$$

問(3) (a) 万有引力の位置エネルギーを用いる.

$$W_1 = -G\frac{Mm}{R+h} - \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{GMmh}{R(R+h)}$$

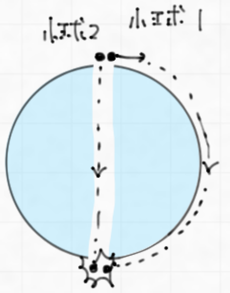
(b) F_2 が O からの距離 r に比例していることから, 平均の値を考える

$$W_2 = R\times\overline{F_2} = R\times\frac{G\cdot\frac{R}{2}mM}{R^3} = \frac{GMm}{2R} \quad \leftarrow \quad \int_R^0 -F_2\,dr = \frac{GMm}{R^3}\int_0^R r\,dr = \frac{GMm}{2R}$$

(c) $\frac{1}{2}mv^2 = W_1 + W_2$ より $v = \sqrt{\dfrac{2}{\cancel{m}}\times\dfrac{GM\cancel{m}}{R}\left(\dfrac{h}{R+h}+\dfrac{1}{2}\right)} = \sqrt{\dfrac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$

(d) $U = \displaystyle\int_R^r -F_2\,dr - G\frac{Mm}{R} = \frac{GMm}{R^3}\int_R^r r\,dr - G\frac{Mm}{R} = \frac{GMm}{R^3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_R^r - G\frac{Mm}{R} = \frac{GMmr^2}{2R^3} - \frac{3GMm}{2R}$

問(4)



$h=0$ のとき $T_1 = T_2$ で, 半周期後, 点 B で左図のように衝突する. 小球 2 の運動は単振動しており. $(r = R|\cos\omega t|)$

衝突後は速さ V_0 で円運動する.

小球 1 は衝突までは円運動し, その後はトンネル内を落下する

小球 1 … (お)　　小球 2 … (か)

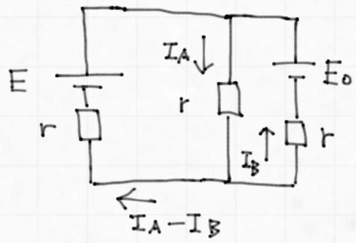
2

問(1) (a) (i) 回路を貫く下向きの磁束が減少するので下向きの磁場を作るような向きの電流を流そうとする向き(時計まわり)の起電力が発生する　$E = Bv_0l$

(ii) $E = I_1r + I_1r$ より　$I_1 = \dfrac{Bv_0l}{2r}$

(iii) 導体棒には大きさ BI_1l で左向きの電磁力が加わっている　$F = \dfrac{B^2v_0l^2}{2r}$

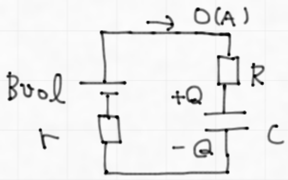
(iv)



(回路の式) $\begin{cases} E = I_Ar + (I_A - I_B)r \\ E_0 = I_Ar + I_Br \end{cases}$

連立して　$I_A = \dfrac{E + E_0}{3r}$, $I_B = \dfrac{2E_0 - E}{3r}$

問(2)



(a) $Bv_0l = \dfrac{Q}{C}$　より　$Q = BCv_0l$

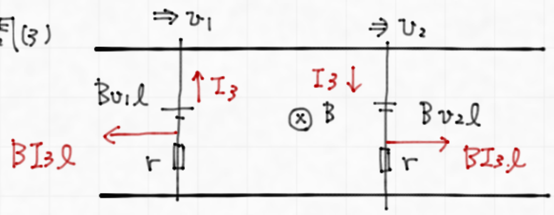
(b) 誘導起電力が供給したエネルギーは　$Q \times Bv_0l$

コンデンサーに蓄えられているのは　$\dfrac{Q^2}{2C}$

この差がジュール熱になったと考えられる. また2つの抵抗を流れた電流は常に等しかったので. 消費電力の比は抵抗値と等しい

$$J = \left(QBv_0l - \frac{Q^2}{2C}\right) \times \frac{R}{R+r} = \frac{1}{2}B^2Cv_0^2l^2 \times \frac{R}{R+r} = \frac{B^2Cv_0^2l^2R}{2(R+r)}$$

問(3)



(a) 回路の式　$Bv_1l - Bv_2l = I_3r + I_3r$

より　$I_3 = \dfrac{Bl}{2r}(v_1 - v_2)$

(b) 導体棒1　$m\Delta v_1 = -BI_3l\Delta t$

導体棒2　$2m\Delta v_2 = BI_3l\Delta t$

より　$\Delta v_1 = -\dfrac{BI_3l}{m}\Delta t$

$\Delta v_2 = \dfrac{BI_3l}{2m}\Delta t$

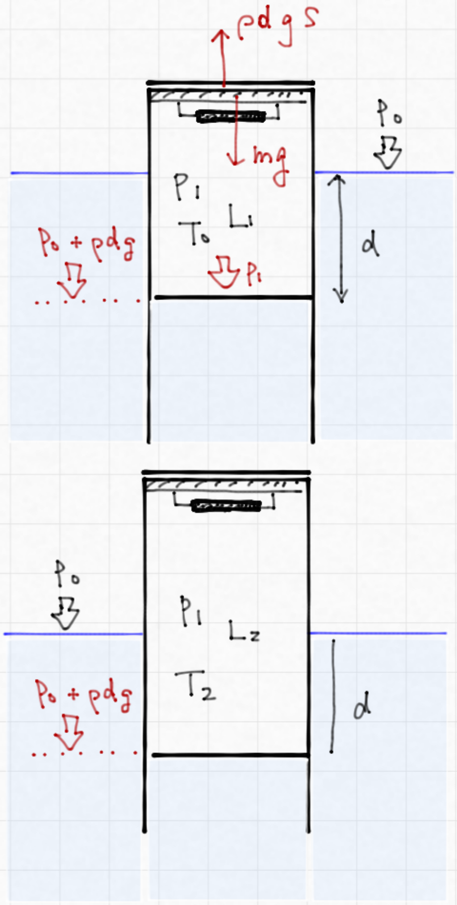
(c) 十分な時間が経つと電流が流れなくなるので $V_1 = V_2$

2つの導体棒が受ける力積の和は0だから運動量が保存する

$$mv_0 = mV_1 + 2mV_2$$
$$= 3mV_1$$

$\therefore$　$V_1 = \dfrac{1}{3}v_0$, $V_2 = \dfrac{1}{3}v_0$

3



状態1　　　　　　圧力　　　　　力のつりあい

$$P_1 S L_1 = nRT_0 ,\quad P_0 + \rho d g = P_1 ,\quad S d \rho g = mg$$

定圧

$$Q = P_1 S(L_2 - L_1) + \frac{3}{2}nR(T_2 - T_0) = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_0)$$

状態2

$$P_1 S L_2 = nRT_2$$

水あり

$$\overset{\boxed{負}}{-Q'} = \frac{P_0 + P_1}{2} S(L_3 - L_2) + \frac{3}{2}nR(T_0 - T_2)$$

状態3

$$P_0 S L_3 = nRT_0$$

断熱縮

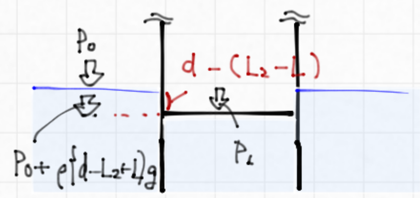
$$0 = \overset{\boxed{負}}{W_{34}} + \frac{3}{2}nR(T_4 - T_0)$$

$$P_1 S L_4 = nRT_4$$

問(1)　(a) $L_1 = \mathbf{\dfrac{nRT_0}{P_1 S}}$　　(b) $S d \rho g = mg$ より $d = \mathbf{\dfrac{m}{S\rho}}$　　(c) $P_1 = \mathbf{P_0 + \dfrac{mg}{S}}$

問(2)　(a) 力のつりあい，圧力の関係式は状態1と同じ．$T_2 = \dfrac{P_1 S L_2}{nR} = \mathbf{\dfrac{L_2}{L_1}T_0}$

(b) $W = \mathbf{P_1 S(L_2 - L_1)}$　　(c) $Q = \mathbf{\dfrac{5}{2}P_1 S(L_2 - L_1)}$



問(3)　(a) $P_0 S L_3 = nRT_0$ より　$L_3 = \dfrac{nRT_0}{P_0 S} = \mathbf{\dfrac{P_1}{P_0}L_1}$

(b) $P_L = P_0 + \rho\big(d - (L_2 - L)\big)g = P_0 + \dfrac{mg}{S} - \rho(L_2 - L)g$

$L_2 = L_3 + d$ だから　$P_L = \mathbf{P_0 - \rho(L_3 - L)g}$

(c) $W' = -\dfrac{1}{2}(P_0 + P_1)S(L_3 - L_2) = \mathbf{\dfrac{1}{2}(P_0 + P_1)Sd}$

(d) $-Q' = -W' + \dfrac{3}{2}nR(T_0 - T_2)$ および　$W = P_1 S(L_2 - L_1) = nR(T_2 - T_0)$

$\mathbf{Q' = W' + \dfrac{3}{2}W}$

問(4)　断熱圧縮により気体は負の仕事をし，内部エネルギーは増加する

すなわち温度は上昇する（$T_4 > T_0$）　状態1と状態4の状態方程式より $\dfrac{L_1}{L_4} = \dfrac{T_1}{T_4} < 1$

となるので　$L_4 > L_1$ と分かる　　**(あ)**