2023 愛知工業大学 M方式 （理系）

1

(1) $a^3-b^3-c^3=(b+c)^3-b^3-c^3=(b+c)(b^2+2bc+c^2)-(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$=(b+c)(2bc+bc)=3abc$

∴ $\dfrac{a^3-b^3-c^3}{abc}=\mathbf{3}$

$a=\dfrac{1}{2+\sqrt3}$, $b=\dfrac{2+\sqrt3}{2}$, $c=\dfrac{2-3\sqrt3}{2}$ として

$a^3-b^3-c^3=3abc=3\left(\dfrac{1}{\cancel{2+\sqrt3}}\right)\left(\dfrac{\cancel{2+\sqrt3}}{2}\right)\left(\dfrac{2-3\sqrt3}{2}\right)=\mathbf{\dfrac{6-9\sqrt3}{4}}$

(2) $a_{n+1}-a_n=2n^2-19n$ $\{a_n\}$の階差数列は$\{2n^2-19n\}$

$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2-19k)+a_1=\dfrac{2}{6}(n-1)n(2n-1)-\dfrac{19}{2}(n-1)n$

$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac13(n-1)(2n-1)-\dfrac{19}{2}(n-1)=\dfrac23n^2-\dfrac{21}{2}n+\dfrac{59}{6}=\dfrac23\left(n-\dfrac{63}{8}\right)^2+\dfrac{59}{6}-\left(\dfrac{63}{8}\right)^2\times\dfrac23$

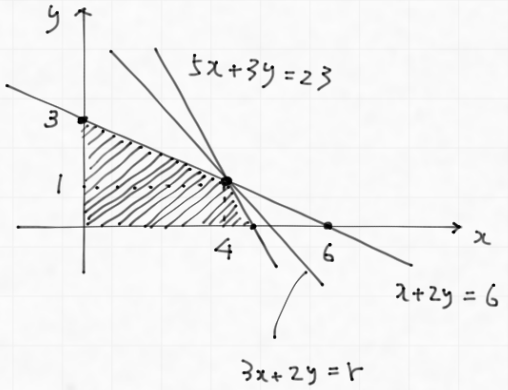
$n=8$で最小. $\dfrac{1}{\cancel{3}}\times7\times\cancel{15}^{5}-\dfrac{19}{2}\times7=7\times\left(-\dfrac92\right)=\mathbf{-\dfrac{63}{2}}$

(3) Pをx(t) Qをy(t)作るとすると

原料Aは $2x+4y$ 原料Bは $5x+3y$ 必要.

利益は $3x+2y=r$

Aについて $2x+4y\le12$, $5x+3y\le23$



$x+2y=6$と$5x+3y=23$の交点は

$(x,y)=(4,1)$

$3x+2y=r$のグラフが左図斜線部と共有点を持つ条件の下でrが最大となればよいので. $(x,y)=(4,1)$のときで

$r=3\times4+2\times1=\mathbf{14}$

(4) $\dfrac{\log_3 5}{\log_9 2}=\dfrac{\frac{\log_2 5}{\log_2 3}}{\frac{1}{\log_2 9}}=\dfrac{\log_2 5}{\cancel{\log_2 3}}\times2\cancel{\log_2 3}=\mathbf{2\log_2 5}$

$(\log_9 2)(\log_2 x)\left(\log_2\dfrac{x}{20}\right)=\log_3\dfrac15=-\log_3 5$

$(\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 20)=-2\log_2 5$

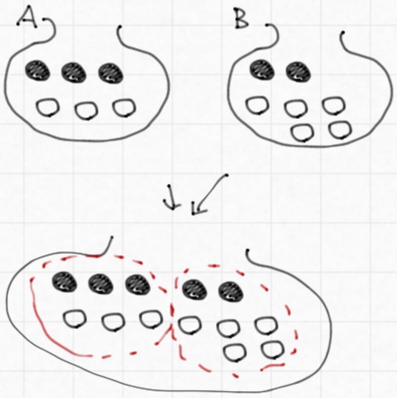
$(\log_2 x)^2-(2\log_2 2+\log_2 5)(\log_2 x)+2\log_2 5=0$

$(\log_2 x-2)(\log_2 x-\log_2 5)=0$

$\log_2 x=2$, $\log_2 5>\log_2 4=2$ ∴ $\log_2 x=2$ $x=2^2=\mathbf{4}$

$\log_2 20=\log_2 2^2\times5$
$=\log_2 2^2+\log_2 5$
$=2\log_2 2+\log_2 5$
$=2+\log_2 5$

(7)



$$1-\frac{{}_8C_2}{{}_{13}C_2}=1-\frac{\cancel{8}^{\,2}\cdot 7}{13\cdot \cancel{12}_{\,3}}=\frac{25}{39}$$

Aからとり出した玉である確率 $\frac{{}_6C_2}{{}_{13}C_2}=\frac{\cancel{6}\cdot 5}{13\cdot \cancel{12}_{\,2}}=\frac{5}{26}$

Aからとり出した2つの白 $\frac{{}_3C_2}{{}_{13}C_2}=\frac{\cancel{3}\cdot \cancel{2}}{13\cdot \cancel{12}_{\,2}}=\frac{1}{26}$

Aからとり出した玉で少なくとも1つは赤 $\frac{5}{26}-\frac{1}{26}=\frac{4}{26}=\frac{2}{13}$

もとめる条件つき確率は

$$\frac{\frac{2}{\cancel{13}}}{\frac{25}{\cancel{39}_{\,3}}}=\frac{6}{25}$$

(8) $m\equiv 3 \pmod 7$

$n\equiv 2 \pmod 7$

$$m^2+n^2\equiv 3^2+2^2\equiv 13\equiv 6 \pmod 7$$

$m^2+n^2=7X+6=6Y$

$7X=6(Y-1)$

Xは6の倍数.

$X=0$ $m^2+n^2=6$ … $m\geqq 3,\ n\geqq 2$なので不可

$X=6$ $m^2+n^2=48$ $m=3,\ 10\ldots$ $n=2,\ 9\ldots$ なので不可

$X=12$ $m^2+n^2=90$ $m=3,\ n=9$

最小値は $m^2+n^2=90$

$a_{n+1} - a_n = b_n$ のとき

$$\boxed{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k} \quad (n \geqq 2)$$

$$\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{n-1} & \boxed{a_n} \\ & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \text{———} & b_{n-1} & \end{array}$$

$$b_1 = (a_2 - a_1)$$

PをxトンQをyトン作るとする

$$\log_a \frac{c}{b} = \log_a c - \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\cancel{\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_a c - \log_a b}$$

$$\log_2 9 = \log_2 3^2 = 2\log_2 3$$