奈良県立医大 2023 後

1 (1) 直線の式を代入.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}(mx+t)^2=1 \iff (b^2+a^2m^2)x^2+2a^2mtx+a^2t^2-a^2b^2=0 \quad \cdots ①$$

①の2次方程式が異なる2解をもつとき Cと直線は2点で交わる. ①の判別式をDとして

$$D/4=(a^2mt)^2-(b^2+a^2m^2)(a^2t^2-a^2b^2)=a^2b^2(a^2m^2+b^2-t^2)>0$$

$a.b>0$だから. $m.t$の満たすべき条件は $\boldsymbol{a^2m^2+b^2>t^2}$

(2) $P(t)$, $Q(t)$のx座標を$\alpha.\beta$とおく($\alpha<\beta$)

$\alpha.\beta$は①の解だから $\alpha+\beta=-\dfrac{2a^2mt}{b^2+a^2m^2}$

線分$P(t)Q(t)$の中点を$(X.Y)$とすると

$$\begin{cases} X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{-a^2mt}{b^2+a^2m^2} & \cdots ② \\ Y=mX+t & \cdots ③ \end{cases}$$

②③よりtを消去して.

$$Y=mX-\frac{b^2+a^2m^2}{a^2m}X=-\frac{b^2}{a^2m}X$$

これは中点$(X.Y)$が直線 $y=-\dfrac{b^2}{a^2m}x$上にあることを示しているので.題意は示された

2

(1) $x^k + n x^{k-1} - (n+2) = f(x)$ とおく.

$f'(x) = kx^{k-1} + n(k-1)x^{k-2} = x^{k-2}\left(kx + n(k-1)\right)$

$x>0$ では $f'(x)$ は常に正だから. $x>0$ で $f(x)$ は単調に増加する.

また, $f(0) = 0 + 0 - (n+2) < 0$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ なので. $f(x)=0$ は

$x>0$ でただ1つの正の解をもつ 証明終

(2) a_n は $f(a_n) = 0$ を満たすので $a_n^k + n a_n^{k-1} - (n+2) = 0$ …①

①より $a_n^{k-1}(a_n + n) = n+2$

$$a_n^{k-1} = \frac{n+2}{a_n+n} < \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \quad (\because a_n > 0)$$

$f(1) = 1 + n - n - 2 = -1$ だから (1)の考察より $1 < a_n$

よって $1 < a_n < \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{k-1}}$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{k-1}} = 1$ だから はさみうちの原理より a_n は 1に収束することが分かる

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

3

(1) $\lceil 3xyz \rceil - 1 < 3xyz \leqq \lceil 3xyz \rceil$ …①

$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$= (x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\times\frac{1}{2} \geqq 0$ …②

(右辺) − (左辺) $= x^3+y^3+z^3+a-\lceil 3xyz \rceil$

$\geqq x^3+y^3+z^3+1-\lceil 3xyz \rceil$

$= x^3+y^3+z^3-3xyz+3xyz-\lceil 3xyz \rceil+1$

$= \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}+1+3xyz-\lceil 3xyz \rceil \geqq 0$

(∵ ①より $3xyz+1 > \lceil 3xyz \rceil$)

よって $a \geqq 1$ のとき 条件(G)は成り立っている.

(2) 条件(G)で. $x = 1+\Delta x$ $(0<\Delta x<\frac{1}{3})$, $y=1$ $z=1$ とする

$\lceil 3(1+\Delta x)\cdot 1\cdot 1 \rceil < (1+\Delta x)^3+1+1+a$

$\Leftrightarrow$ $4 < (1+\Delta x)^3+2+a$

$a > 2-(1+\Delta x)^3$

ここで $\Delta x \to +0$ とすると $2-(1+\Delta x)^3 \to 1$ となるので $a \geqq 1$ が必要

(1)より $a \geqq 1$ が十分条件だったので. 条件(G)が成り立つ実数 a の最小値は $a=1$

4 (1) $m=k^2$のとき.

$n_1=[\sqrt{k^2}]=[k]=k$ であり $m=k^2=n_1^2$, $l(k^2)=1$

$n_1=[\sqrt{k^2-1}]=k-1$

$n_2=[\sqrt{k^2-1-(k-1)^2}]=[\sqrt{2k-2}]$

ここで $m=k^2>1$ だから $k\geqq 2$であり $2k-2\geqq 2$

よって $\sqrt{2k-2}>1$ であり $n_2=[\sqrt{2k-2}]\geqq 1$

$\therefore\ l(k^2-1)\geqq 2 \neq l(k^2)$

以上より $m(>1)$が $m=k^2$を満たすとき $l(m)\neq l(m-1)$となることが示された.

(2)

(i) $m\leqq 2^2$のとき

$1=1^2 \dots l(1)=1$ $2=1^2+1^2\dots l(2)=2$, $3=1^2+1^2+1^2\dots l(3)=3$

$4=2^2\dots l(4)=1$ だから $m\leqq 2^2$のとき $l(m)\neq l(m-1)$ が成り立つ.

(ii) $1\leqq m\leqq k^2$ ($k\geqq 2$を満たす整数) を満たす全ての整数 mについて

$l(m)\neq l(m-1)$ が成り立つと仮定する

このとき $k^2<m<(k+1)^2$ を満たす整数mについて $[\sqrt{m}]=k$ だから

$l(m)=1+l(m-k^2)$

が成り立つ. $0<m-k^2<(k+1)^2-k^2=2k+1$ より $1\leqq m-k^2\leqq 2k$ で,

$k\geqq 2$のとき $2k\leqq k^2$なので, 仮定より $1\leqq m-k^2\leqq 2k\leqq k^2$ であり,

仮定より $k^2<m<(k+1)^2$ を満たす整数mについて $l(m-k^2)\neq l(m-k^2-1)$

が成り立つので $l(m)\neq l(m-1)$ が成り立つ.

また (1) より $m=(k+1)^2$のときも $l(m)\neq l(m-1)$だから 仮定の下で

$1\leqq m\leqq (k+1)^2$を満たす全ての整数mについて $l(m)\neq l(m-1)$が成り立つ

(i)(ii) より 数学的帰納法により 2以上の全ての整数 mに対して $l(m)\neq l(m-1)$が成り立つ

ことが示された.

(3)

m	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	$l(m)$
$1 = 1^2$	1	0				1
$2 = 1^2+1^2$	2	0				2
$3 = 1^2+1^2+1^2$	3	0				3
$4 = 2^2$	0	1				1
$5 = 2^2+1^2$	1	1				2
$6 = 2^2+1^2+1^2$	2	1				3
$7 = 2^2+1^2+1^2+1^2$	3	1				4
$8 = 2^2+2^2$	0	2				2
$9 = 3^2$	0	0	1			1
$10 = 3^2+1^2$	1	0	1			2
$11 = 3^2+1^2+1^2$	2	0	1			3
$12 = 3^2+1^2+1^2+1^2$	3	0	1			4
$13 = 3^2+2^2$	0	1	1			2
$14 = 3^2+2^2+1^2$	1	1	1			3
$15 = 3^2+2^2+1^2+1^2$	2	1	1			4
$16 = 4^2$	0	0	0	1		1
$17 = 4^2+1^2$	1	0	0	1		2
$18 = 4^2+1^2+1^2$	2	0	0	1		3
$19 = 4^2+1^2+1^2+1^2$	3	0	0	1		4
$20 = 4^2+2^2$	0	1	0	1		2
21	1	1	0	1		3
22	2	1	0	1		4
23	3	1	0	1		5

$l(a)=5$ となる最小の a は **23**

$n_1 \geqq 2$ のとき、 $m = n_1^2 + r$ （r は $0 \leqq r < (n_1+1)^2 - n_1^2 = 2n_1+1$ を満たす整数）

と表すことができ、 $l(m) = l(r)+1$ の関係が成り立つ

したがって $l(b)=6$ となる最小の b について、

$$b = x^2 + 23 \quad , \quad 0 \leqq 23 < 2x+1$$

を満たす整数 x をもとめればよく、 $23 + x^2 < x^2 + 2x + 1 \iff x > 11 \quad \therefore x = 12$

$$b = 23 + 12^2 = \mathbf{167}$$

同様に $l(c)=7$ となる最小の c は $167+y^2$ かつ $167+y^2 < (y+1)^2$ を満たす

整数 y をもとめればよく、 $167+y^2 < (y+1)^2 \iff y > 83 \quad \therefore y = 84$

$$c = 167 + 84^2 = \mathbf{7223}$$