関西医科大学2023前期

1 (1) $(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)-4ab$

$= (a^2-1)(b^2-1)-4ab = a^2b^2-a^2-b^2+1-4ab = a^2b^2-2ab+1-a^2-b^2-2ab$

$= (ab-1)^2-(a+b)^2 = (ab-1+a+b)(ab-1-a-b)$

$= \mathbf{(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)}$

(2) (1)より

$(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)=4ab \Leftrightarrow (ab+a+b-1)(ab-a-b-1)=0$

(i) $ab+a+b-1=0$ のとき

$(a+1)(b+1)=2$ と因数分解できる.

$a<b$ を満たすとき. $(a+1,\ b+1)=(1,2),\ (-2,-1)$

$(a,b)=(0,1),(-3,-2)$

(ii) $ab-a-b-1=0$ のとき

$(a-1)(b-1)=2$ と因数分解できる.

$a<b$ を満たすとき. $(a-1,\ b-1)=(1,2),\ (-2,-1)$

$(a,\ b)=(2,3),(-1,0)$

(i)(ii)より (a,b) の組みは **4** 組あり、どちらも正となるのは $(a,b)=\mathbf{(2,3)}$

2

(1) $\{a_n\}$の公差を a , $\{b_n\}$の公差を b とおく

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$の一般項は　$a_n = 2+(n-1)a$, $b_n = (n-1)b$

$a_{k+1} = b_{k+1}$ より　$2 + ak = bk$ …①

$a_{2k+1} = 0$ より　$2 + 2ak = 0$ …②

② より　$a = -\frac{1}{k}$　よって　$a_2 = \mathbf{2-\frac{1}{k}}$　$a_{k+1} = 2 - \frac{1}{k}\cdot k = \mathbf{1}$

(2) ① より　$bk = 1$ だから　$b = \frac{1}{k}$　$b_2 = \mathbf{\frac{1}{k}}$　$b_{2k+1} = 2k \times \frac{1}{k} = \mathbf{2}$

(3) $$C_{n+1} = \frac{2-\frac{n}{k}}{\frac{n}{k}} C_n = \frac{2k-n}{n} C_n$$

$n \geqq 2$ のとき

$$C_n = \frac{2k-(n-1)}{n-1} C_{n-1} = \frac{2k-n+1}{n-1} C_{n-1}$$

$$= \frac{2k-n+1}{n-1} \times \frac{2k-2+2}{n-2} \times C_{n-2}$$

$$= \cdots = \frac{2k-n+1}{n-1} \times \frac{2k-2+2}{n-2} \times \cdots \times \frac{2k-1}{1} C_1$$

$$= \frac{(2k-1)!}{(n-1)!\,(2k-n)!} = {}_{2k-1}C_{n-1}$$

上の式で $n=1$ とすると ${}_{2k-1}C_0 = 1$ だから上の結果は $n=1$ でも成り立つ.

よって　$C_n = {}_{2k-1}C_{n-1}$ であり.　$C_k = \mathbf{{}_{2k-1}C_{k-1}}$, $C_{2k} = {}_{2k-1}C_{2k-1} = \mathbf{1}$

(4) $n \geqq 2$ のとき

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{\cancel{(2k-1)!}\,(n-2)!\,(2k-n+1)!}{(n-1)!\,(2k-n)!\,\cancel{(2k-1)!}} = \frac{2k-n+1}{n-1} \geqq 1 \text{ を解くと}$$

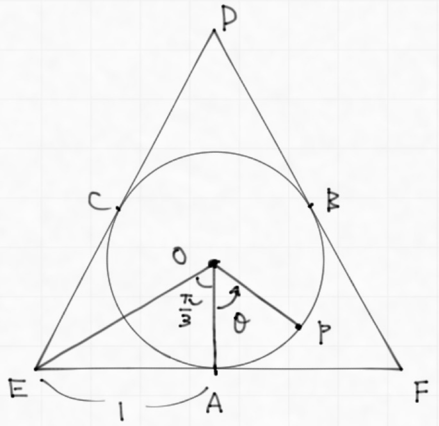
$2k-n+1 \geqq n-1 \iff n \leqq k+1$

となるので　$C_1 \leqq C_2 \leqq \cdots C_{k-2} \leqq C_{k-1} \leqq C_k = C_{k+1} \geqq C_{k+2} \geqq \cdots \geqq C_{2k}$

C_n が最大となるのは $n = k$, $k+1$ のとき

(5) $$\sum_{r=1}^{2k} C_r = \sum_{r=1}^{2k} {}_{2k-1}C_{r-1} = \sum_{r=0}^{2k-1} {}_{2k-1}C_r = (1+1)^{2k-1} = \mathbf{2^{2k-1}}$$

3



(1) 正三角形の頂点をD, E, Fとおく（左図）

$\angle EOA = \frac{\pi}{3}$, $AE = 1$ だから $OA = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とおくと $\vec{OC} = -\vec{a} - \vec{b}$.

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{6}$

Pは内接円上の点なので. $|\vec{OP}| = OA = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\vec{PA}\cdot\vec{PB} + \vec{PB}\cdot\vec{PC} + \vec{PC}\cdot\vec{PA} = (\vec{a} - \vec{OP})\cdot(\vec{b} - \vec{OP}) + (\vec{b} - \vec{OP})\cdot(-\vec{a} - \vec{b} - \vec{OP}) + (-\vec{a} - \vec{b} - \vec{OP})\cdot(\vec{a} - \vec{OP})$

$= -\frac{1}{6} - \cancel{\vec{a}\cdot\vec{OP}} - \cancel{\vec{b}\cdot\vec{OP}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\vec{b}\cdot\vec{OP}} + \cancel{\vec{a}\cdot\vec{OP}} + \cancel{\vec{b}\cdot\vec{OP}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\vec{a}\cdot\vec{OP}} + \frac{1}{6} + \cancel{\vec{b}\cdot\vec{OP}} - \cancel{\vec{a}\cdot\vec{OP}} + \cancel{\frac{1}{3}}$

$= \mathbf{\frac{1}{2}}$

(3) $|\vec{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = \frac{1}{3} - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{3} = 1$

$|\vec{AB}|^2 = |\vec{PB} - \vec{PA}|^2 = |\vec{PB}|^2 + |\vec{PA}|^2 - 2\vec{PA}\cdot\vec{PB} = 1$

同様に $|\vec{BC}|^2 = |\vec{PC}|^2 + |\vec{PB}|^2 - 2\vec{PB}\cdot\vec{PC} = 1$. $|\vec{CA}|^2 = |\vec{PA}|^2 + |\vec{PC}|^2 - 2\vec{PA}\cdot\vec{PC} = 1$

これらの式を辺々加えると

$2|\vec{PA}|^2 + 2|\vec{PB}|^2 + 2|\vec{PC}|^2 - 2(\vec{PA}\cdot\vec{PB} + \vec{PB}\cdot\vec{PC} + \vec{PC}\cdot\vec{PA}) = 3$

(2)の結果を代入して $|\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2 + |\vec{PC}|^2 = \frac{1}{2}(3 + 2\cdot\frac{1}{2}) = \mathbf{2}$

(4) $\angle AOP = \theta$ とおく（左図）と （θは反時計まわりを正とし. $0 < \theta < 2\pi$）

$\angle POB = \frac{2}{3}\pi - \theta$, $\angle POC = \frac{2}{3}\pi + \theta$.

$\vec{PA}\cdot\vec{PB} = (\vec{a} - \vec{OP})\cdot(\vec{b} - \vec{OP}) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - (\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{OP}$

$= \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\cos\theta - \frac{1}{3}\cos(\frac{2}{3}\pi - \theta) = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\cos\theta - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\sin(\theta - \frac{\pi}{3})$

$\theta = \frac{5}{6}\pi$ のとき最大 $\vec{PA}\cdot\vec{PB} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

$\theta = \frac{4}{3}\pi$ のとき最小 $\vec{PA}\cdot\vec{PB} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \mathbf{-\frac{1}{6}}$

4 ①

(1) Pを(x.y)とおくと AP×BP = 12 が成り立つので.

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}\times\sqrt{(x+3)^2+y^2}=12$$

$$\sqrt{(x^2-9)^2+2(x^2+9)y^2+y^4}=12 \quad \cdots ①$$

①はxの偶数次の項しか持たないので. (x.y)が①上にあれば(−x,y)も①上にあり.

同様に(x.y)が①上にあるとき (x,−y)も必ず①上に存在する.

したがって①はx軸およびy軸について対称である

(2) ①でx=0とすると. $\sqrt{y^4+18y^2+9^2}=12$ より　$y^2+9=12$　(∵$y^2+9\geqq0$)

∴ $y=\pm\sqrt{3}$

y軸との交点は **$(0, \pm\sqrt{3})$**

①でy=0とすると　$|x^2-9|=12$ より　$x^2=21$　(∵ $x^2-9\geqq0$)　∴ $x=\pm\sqrt{21}$

x軸との交点は **$(\pm\sqrt{21}, 0)$**

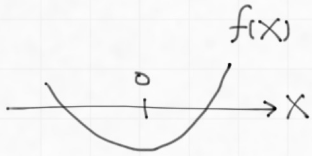
(3) ①の両辺を2乗すると

$$(x^2-9)^2+2(x^2+9)y^2+y^4=12^2$$

$x^2=X$とすると　$X^2-(18-2y^2)X+y^4+18y^2-63=0 \quad \cdots ②$

②はXについての2次方程式で. ②がX≧0を満たす解を持つとき ①を満たす(x.y)は存在する

②式右辺をf(X)として



• $f(0)=y^4+18y^2-63\leqq0$ のとき

$(y^2+21)(y^2-3)<0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\leqq y\leqq\sqrt{3}$

このとき f(x)のグラフは右のようになり. f(x)=0は

X≧0で必ず解をもつ

• $f(0)=y^4+18y^2-63>0$ のとき　($y<-\sqrt{3}$, $y>\sqrt{3}$ のとき)

f(x)の軸は $X=9-y^2\geqq0$ かつ　判別式 $D/4=(9-y^2)^2-y^4-18y^2+63\geqq0$ のとき

f(x)=0は X≧0の範囲に解をもつ.

$-3\leqq y\leqq3$,　$-36y^2+144\geqq0$　$\Leftrightarrow$　$-2\leqq y\leqq2$

まとめると　$-2\leqq y<-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}<y\leqq2$

以上全てをまとめると.　**$-2\leqq y\leqq2$**　のとき. ①を満たす(x.y)は存在し. これが

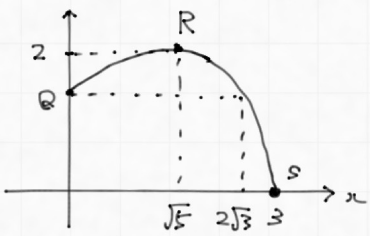
yの値の範囲である.

(4) ② より　$X = 9-y^2 \pm \sqrt{D/4} = 9-y^2 \pm \sqrt{144-36y^2}$

(1) より, グラフは x 軸, y 軸について対称なので, $x \geqq 0$. $y \geqq 0$ の範囲で考える

$x = \sqrt{X} = \sqrt{9-y^2 \pm \sqrt{144-36y^2}}$

$\quad = \sqrt{9-y^2 \pm 6\sqrt{4-y^2}}$



$9-y^2 - 6\sqrt{4-y^2} \geqq 0$ を解くと

$(9-y^2)^2 \geqq 36(4-y^2)$　　$(\because\ 0 \leqq y \leqq 2)$

$(y^2+21)(y^2-3) \geqq 0$

$\sqrt{3} \leqq y \leqq 2$

$x = \sqrt{9-y^2-6\sqrt{4-y^2}}$ のグラフは右上 Q～R の部分

$x = \sqrt{9-y^2+6\sqrt{4-y^2}}$　　〃　　R～S　〃

$x \geqq 0$. $y \geqq 0$ の範囲のグラフの概形は右上のようになり, もとめる回転体の体積 V は

$$V = 2\int_0^2 \pi \sqrt{9-y^2+6\sqrt{4-y^2}}^{\,2} dy - 2\int_{\sqrt{3}}^2 \pi \sqrt{9-y^2-6\sqrt{4-y^2}}^{\,2} dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 9-y^2+6\sqrt{4-y^2}\,dy - 2\pi \int_{\sqrt{3}}^2 9-y^2-6\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$= 2\pi \left[9y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{3}} + 12\pi \int_0^2 \sqrt{4-y^2}\,dy + 12\pi \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$= 16\sqrt{3}\pi + 12\pi \int_0^2 \sqrt{4-y^2}\,dy + 12\pi \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-y^2}\,dy$$

$\int_0^2 \sqrt{4-y^2}\,dy$ について　$y = 2\cos\theta$ とおくと　$\frac{dy}{d\theta} = -2\sin\theta$.

y	$0 \to 2$
θ	$\frac{\pi}{2} \to 0$

$$\int_0^2 \sqrt{4-y^2}\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{4-4\cos^2\theta}(-2\sin\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \left[2\theta - \sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

同様に　$\int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-y^2}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \left[2\theta - \sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

以上より

$$V = 16\sqrt{3}\pi + 12\pi\left(\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathbf{16\pi^2 + 10\sqrt{3}\pi}$$

4 ②

(1) Pを (x, y) とおくと $AP \times BP = 12$ が成り立つので.

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} \times \sqrt{(x+3)^2+y^2} = 12$$

$$\sqrt{(x^2-9)^2+2(x^2+9)y^2+y^4} = 12 \quad \cdots ①$$

① は x の偶数次の項しか持たないので. (x, y) が ① 上にあれば $(-x, y)$ も① 上にあり.

同様に (x, y) が ① 上にあるとき $(x, -y)$ も必ず ① 上に存在する.

したがって ① は x 軸および y 軸について対称である

(2) ① で $x=0$ とすると. $\sqrt{y^4+18y^2+9^2}=12$ より $\quad y^2+9=12 \quad (\because y^2+9 \geqq 0)$

$\therefore y = \pm\sqrt{3}$

y 軸との交点は $\mathbf{(0, \pm\sqrt{3})}$

① で $y=0$ とすると $|x^2-9|=12$ より $x^2=21$ $(\because x^2-9 \geqq 0)$ $\therefore x = \pm\sqrt{21}$

x 軸との交点は $\mathbf{(\pm\sqrt{21}, 0)}$

(3) $$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+4}} \times \left(1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+4}} \times \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} = \mathbf{\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}}$$

$$\int 2\sqrt{x^2+4}\,dx = 2\int 1\cdot\sqrt{x^2+4}\,dx = 2x\sqrt{x^2+4} - 2\int x \times \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

$$= 2x\sqrt{x^2+4} - 2\int \sqrt{x^2+4} - \frac{4}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

$$4\int\sqrt{x^2+4}\,dx = 2x\sqrt{x^2+4} + 8\int f'(x)\,dx$$

$$\int 2\sqrt{x^2+4}\,dx = \mathbf{x\sqrt{x^2+4} + 4\log(x+\sqrt{x^2+4}) + C} \quad (\text{Cは積分定数})$$

(4) ① より $\quad x^4-18x^2+81+2x^2y^2+18y^2+y^4=144$

$$y^4+2x^2y^2+18y^2+x^4-18x^2-63=0$$

$$y^2 = -x^2-9 \pm\sqrt{(x^2+9)^2-x^4+18x^2+63} = -x^2-9\pm 6\sqrt{x^2+4}$$

$y^2>0$ だから $y^2 = -x^2-9+6\sqrt{x^2+4}$

$y^2 \geqq 0$ だから $-x^2-9+6\sqrt{x^2+4} \geqq 0 \Leftrightarrow 6\sqrt{x^2+4} \geqq x^2+9$

両辺2乗して $36(x^2+4) \geqq x^4+18x^2+81 \Leftrightarrow x^4-18x^2-63 \leqq 0 \Leftrightarrow (x^2-21)(x^2+3) \leqq 0$

$x^2+3>0$ なので $x^2-21 \leqq 0 \quad \therefore -\sqrt{21} \leqq x \leqq \sqrt{21}$

(1) より. Cは x 軸および y 軸について対称なので回転体の体積 V は

$$V = 2\int_0^{\sqrt{21}} \pi y^2\,dx = 2\pi\int_0^{\sqrt{21}} -x^2-9+6\sqrt{x^2+4}\,dx = 2\pi\left[-\frac{1}{3}x^3-9x+3x\sqrt{x^2+4}+12\log(x+\sqrt{x^2+4})\right]_0^{\sqrt{21}}$$

$$= 2\pi\left(-7\sqrt{21}-9\sqrt{21}+3\sqrt{21}\times 5+12\log(\sqrt{21}+5)\right) - 2\pi(0-0+0+12\log 2)$$

$$= \mathbf{24\pi\log(\sqrt{21}+5) - 24\pi\log 2 - 2\sqrt{21}\pi}$$