# 九州大学2023後期

1 (1) $x^a=f(x)$, $e^{bx}=g(x)$, 点Pのx座標をpとおく.

このとき. $f'(x)=ax^{a-1}$, $g'(x)=be^{bx}$ だから

$y=f(x)$と$y=g(x)$が点Pで接するための条件は $f(p)=g(p)$ かつ $f'(p)=g'(p)$ がなりたつことで

$$p^a=e^{bp} \quad \cdots ①$$

かつ $$ap^{a-1}=be^{bp} \quad \cdots ②$$

$p=0$のときは $f(0)=0 \neq g(0)=1$ だから $x=0$で接することはなく、$p\neq 0$

①より 両辺の自然対数をとると.

$$a\log p=bp \iff b=\frac{a}{p}\log p$$

これを②に代入.

$$ap^{a-1}=\frac{a}{p}\log p\times p^a$$

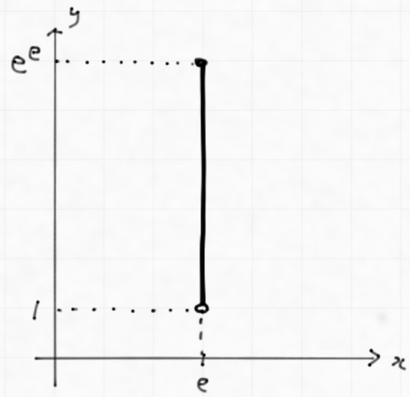
$$\log p=1$$

よって ① かつ ② を満たすpは $p=e$ であり

接点Pは $\mathbf{(e,e^a)}$

$0<a\leqq e$ だから $1<e^a\leqq e^e$

Pの存在範囲は右図のようになる.




(2) $\sqrt{2x}=h(x)$ とおく. $h'(x)=\frac{1}{2}\times(2x)^{-\frac{1}{2}}\times 2=\frac{1}{\sqrt{2x}}$

Qのx座標をqとする. $h(0)=0\neq g(0)$ だから $q\neq 0$ なので

$y=g(x)$と$y=h(x)$がQで接するための条件は

$h(q)=g(q)$ かつ $h'(q)=g'(q)$

$\iff$ $\sqrt{2q}=e^{bq}$ かつ $\frac{1}{\sqrt{2q}}=be^{bq}$

前者の自然対数をとる $\frac{1}{2}\log(2q)=bq$ より $b=\frac{1}{2q}\log(2q)$を後者に代入

$$\frac{1}{\sqrt{2q}}=\frac{1}{2q}\log(2q)\times\sqrt{2q}$$

$\log 2q=1$ $\quad q=\frac{e}{2}$ $\quad$ 点Qの座標は $\mathbf{\left(\frac{e}{2},\sqrt{e}\right)}$

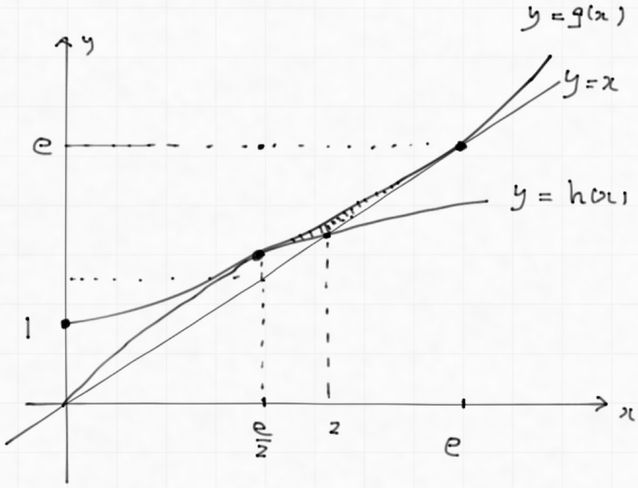
このとき $b=\frac{1}{2\cdot\frac{e}{2}}\log\left(2\cdot\frac{e}{2}\right)=\frac{1}{e}$

① ② は $p^a=e^{\frac{p}{e}}$, $ap^{a-1}=e^{\frac{p}{e}}\times\frac{1}{e}$ となり $a\cancel{p^{a-1}}=p^{\cancel{a}}\cdot\frac{1}{e} \iff p=ae$

これを $p^a=e^{\frac{p}{e}}$ に代入して $ae^a=e^a$ $\quad\therefore$ $\mathbf{a=1}$ $\quad(p=e)$

(3) $a=1.\ p=e,\ b=\frac{1}{e}$ だから

$f(x)=x,\quad g(x)=e^{\frac{1}{e}x},\quad h(x)=\sqrt{2x}$




$h(x)=g(x)$ となるのは

$\sqrt{2x}=x$ を解いて $x=0.2$

$y=f(x).\ y=g(x).\ y=h(x)$ に囲まれるのは

右グラフの斜線部で.

$$S=\int_{\frac{e}{2}}^{2}\left(e^{\frac{1}{e}x}-\sqrt{2x}\right)dx+\int_{2}^{e}\left(e^{\frac{1}{e}x}-x\right)dx$$

$$=\int_{\frac{e}{2}}^{e}e^{\frac{1}{e}x}\,dx-\sqrt{2}\int_{\frac{e}{2}}^{2}\sqrt{x}\,dx-\int_{2}^{e}x\,dx$$

$$=\left[e\cdot e^{\frac{1}{e}x}\right]_{\frac{e}{2}}^{e}-\sqrt{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{e}{2}}^{2}-\left[\frac{1}{2}x^{2}\right]_{2}^{e}$$

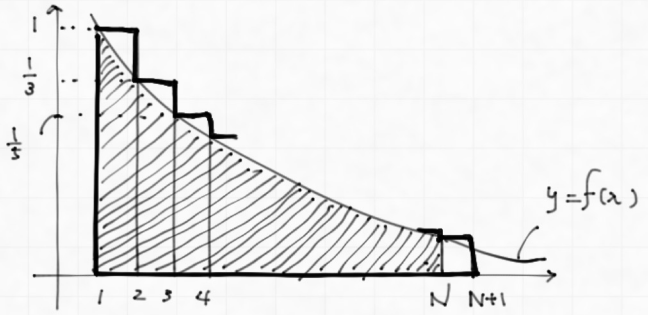
$$=e^{2}-\sqrt{e}\,e-\sqrt{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{\cancel{2}}{3}\times\frac{e\sqrt{e}}{\cancel{2}\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}e^{2}+2$$

$$=\frac{1}{2}e^{2}-\frac{2}{3}e\sqrt{e}-\frac{2}{3}$$

**2**

(1) $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1}$ , $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ とおく

右グラフで斜線部の面積は太枠部の面積より小さい.




太枠部の面積 $= \sum_{k=1}^{N} f(k) = S_N$

斜線部の面積 $= \int_1^N f(x)\,dx = \left[\log|2x-1| \times \frac{1}{2}\right]_1^N = \frac{1}{2}\log(2N-1)$

$S_N > \frac{1}{2}\log(2N-1)$ および $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\log(2N-1) = \infty$ より $\lim_{N\to\infty} S_N = \infty$

よって 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ は発散する

(2) $(右辺) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{N-1} x^{2N-2} + \frac{(-1)^N x^{2N}}{1+x^2}$

$= 1 \times \frac{1-(-x^2)^N}{1-(-x^2)} + \frac{(-1)^N x^{2N}}{1+x^2} = \frac{1-(-x^2)^N + (-1)^N x^{2N}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} = 左辺$　　証明終.

(3) (2) の両辺を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で積分する

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{N} (-x^2)^{N-1}\right)dx + \int_0^1 \frac{(-1)^N x^{2N}}{1+x^2}\,dx$$

左辺について $x = \tan\theta$ と置換すると $\left(\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta},\ \begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}\right)$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \times \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{N} (-x^2)^{n-1}\right)dx = \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 (-x^2)^{n-1}\,dx = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \times \left[\frac{1}{2n-1} x^{2n-1}\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$$

以上の結果をまとめると

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(-1)^N x^{2N}}{1+x^2}\,dx \quad \cdots ①$$

ここで $0 < \int_0^1 \frac{x^{2N}}{1+x^2}\,dx < \int_0^1 x^{2N}\,dx = \frac{1}{2N+1}$

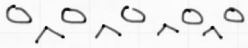
および $\lim_{N\to\infty} \frac{0}{2N+1}$ より. はさみうちの原理より. $\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{2N}}{1+x^2}\,dx = 0$ だから.

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

よって $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ は収束し、その和は $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

3

(1) 5つのボールを3つに分けることを考え対応づける



4つの位置（右図）に区切り線を入れるのが $_4C_2=6$ 通り

したがって、もとめる確率は

$$\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$$

(2) 最小値が4以上になるのは 4.5.6の目しかでないときの $3^3$ 通り。

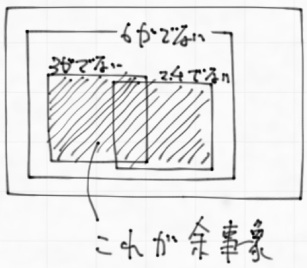
そこから最小値が5以上になる $2^3$ 通りを除く

$$\frac{3^3-2^3}{6^3}=\frac{19}{216}$$

(3) 6の倍数とならないのは 6の目が出なくて、2および4 と 3 が少なくとも一方は出ないときで、

3と6がでない… $4^3$ , 2,4,6がでない… $3^3$ , 2,3,4,6がでない… $2^3$

より $\dfrac{4^3+3^3-2^3}{6^3}=\dfrac{83}{6^3}$ $\quad 1-\dfrac{83}{216}=\dfrac{133}{216}$




(4) 重解をもつのは $b^2-4ac=0$ のとき。

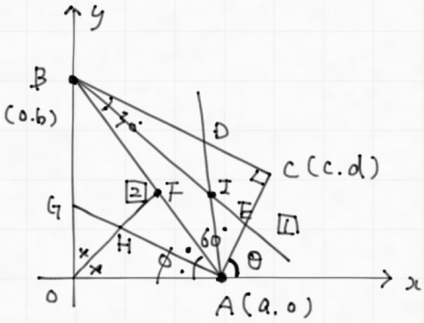
4acの値は

| c \ a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 2 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 |
| 3 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 |
| 4 | 16 | 32 | 48 | 64 | 80 | 96 |
| 5 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
| 6 | 24 | 48 | 72 | 96 | 120 | 144 |

$b^2=1,4,9,16,25,36$ だから、もとめる確率は

$$\frac{5}{6^3}=\frac{5}{216}$$

4




(1) $|\vec{AB}| = 2|\vec{AC}|$ および $\angle ACB = 90°$ より $\angle CBA = 30°$

$\angle CAB = 60°$ $|\vec{BC}| = \sqrt{3}|\vec{AC}|$

$\angle OAB = \phi$ とおくと $\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\theta = 180° - 60° - \phi = 120° - \phi$ だから.

$$\sin\theta = \sin(120°-\phi) = \sin 120°\cos\phi - \cos 120°\sin\phi$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}a+b}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\theta = \cos(120°-\phi) = \cos 120°\cos\phi + \sin 120°\sin\phi = -\frac{a}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\sqrt{3}b}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}b-a}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

(2) $\angle BAC$の二等分線と辺BCの交点をD. $\angle ABC$の二等分線と辺ACの交点をEとする

ADとBEの交点が内接円の中心でこれをIとする.

$BD:DC = AB:AC = 2:1$ だから $BD = \frac{2}{3}BC$

$AI:ID = BA:BD = BA:\frac{2}{3}BC = 2:\frac{2}{3}\sqrt{3} = 3:\sqrt{3}$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3}b-a \\ \sqrt{3}a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}b+3a}{4} \\ \frac{\sqrt{3}a+b}{4} \end{pmatrix}$$

$$\vec{OI} = \frac{3}{3+\sqrt{3}}\vec{OD} + \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\vec{OA} = \frac{3}{3+\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{2}{3}\vec{OC}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\vec{OA}$$
$$= \frac{1}{3+\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + \frac{2}{3+\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}b+3a}{4} \\ \frac{\sqrt{3}a+b}{4} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3+\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{3}{2}a + \sqrt{3}a \\ b + \frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{b}{2} \end{pmatrix} = \frac{3-\sqrt{3}}{12}\begin{pmatrix} \sqrt{3}b + 3a + 2\sqrt{3}a \\ 3b + \sqrt{3}a \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (1+\sqrt{3})a + (\sqrt{3}-1)b \\ (\sqrt{3}-1)a + (3-\sqrt{3})b \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{(1+\sqrt{3})a+(\sqrt{3}-1)b}{4}, \frac{(\sqrt{3}-1)a+(3-\sqrt{3})b}{4}\right)$$

(2) $\angle AOB$の二等分線とABの交点をFとし、$\angle OAB$の二等分線と辺OBの交点をG,

OFとAGの交点をHとする

$AF:FB = OA:OB = a:b$ , $OH:HF = OA:AF = a:\frac{a}{a+b}\sqrt{a^2+b^2} = a+b:\sqrt{a^2+b^2}$

$$\vec{OH} = \frac{a+b}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}\vec{OF} = \frac{\cancel{a+b}}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b}{\cancel{a+b}}\vec{OA} + \frac{a}{\cancel{a+b}}\vec{OB}\right) = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + \frac{1}{16}$$

$$s^2 = |\vec{HI}|^2 = |\vec{OH}|^2 + |\vec{OI}|^2 - 2\vec{OH}\cdot\vec{OI}$$
$$= \frac{(a+b-\sqrt{a^2+b^2})^2}{4}\times 2 + \frac{((1+\sqrt{3})a+(\sqrt{3}-1)b)^2}{16} + \frac{((\sqrt{3}-1)a+(3-\sqrt{3})b)^2}{16}$$
$$- (a+b-\sqrt{a^2+b^2})\times\frac{1}{4}\left((1+\sqrt{3})a+(\sqrt{3}-1)b+(\sqrt{3}-1)a+(3-\sqrt{3})b\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(4a^2+2\sqrt{3}a^2+4b^2-2\sqrt{3}b^2+4ab+4a^2-2\sqrt{3}a^2+12b^2-6\sqrt{3}b^2+(8\sqrt{3}-12)ab\right)$$
$$- \frac{1}{4}\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)\left(2\sqrt{3}a+2b\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+\cancel{2ab}+a^2+b^2-2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}\right)+\frac{1}{2}\left(a^2+2b^2-\sqrt{3}b^2-\cancel{ab}+\sqrt{3}ab\right)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}a^2+\cancel{ab}+\sqrt{3}ab+b^2-(\sqrt{3}a+b)\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3a^2+3b^2-\sqrt{3}b^2+\cancel{\sqrt{3}ab}-2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{3}a^2-\cancel{\sqrt{3}ab}+(\sqrt{3}a+b)\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((3-\sqrt{3})a^2+(3-\sqrt{3})b^2-(2a-\sqrt{3}a+b)\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$$\therefore\ s = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2)-\frac{(2a-\sqrt{3}a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

(3) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2+b^2} = l$ だから

$$s^2 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}l^2-\frac{(2-\sqrt{3})a+b}{2}l = \frac{3-\sqrt{3}}{2}l^2-\frac{l}{2}\left\{(2-\sqrt{3})a+b\right\}$$

ここでコーシー・シュワルツの不等式より

$$\left\{(2-\sqrt{3})^2+1^2\right\}(a^2+b^2) \geqq \left\{(2-\sqrt{3})a+b\right\}^2$$

$(8-4\sqrt{3})l^2 \geqq \left\{(2-\sqrt{3})a+b\right\}^2$ だから $(2-\sqrt{3})a+b \leqq \sqrt{8-4\sqrt{3}}\,l$

となり、$s$ はこのとき最小となる。等号は $a:b = 2-\sqrt{3}:1$ のときなので

$b = \dfrac{a}{2-\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})a$ を $l^2 = a^2+b^2$ に代入

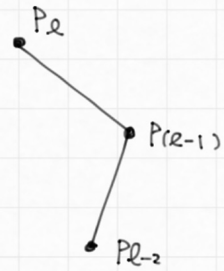
$a^2+(7+4\sqrt{3})a^2 = l^2$ $\qquad a = \sqrt{\dfrac{1}{8+4\sqrt{3}}}\,l = \dfrac{l}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}l$

5

(1) $z_k = \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right) = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = z_1^k$ だから

$a_\ell = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_{\ell-1}$

$= 1 + z_1 + z_1^2 + \cdots + z_1^{\ell-1} = 1 \times \frac{z_1^\ell - 1}{z_1 - 1} = \frac{z_\ell - 1}{z_1 - 1}$ 証明終




(2) $a_\ell - a_{\ell-1} = z_{\ell-1} = z_1^{\ell-1}$

$a_{\ell-1} - a_{\ell-2} = z_{\ell-2} = z_1^{\ell-2}$

$|z_1| = 1$ だから $|a_\ell - a_{\ell-1}| = 1$, $|a_{\ell-1} - a_{\ell-2}| = 1$

$\arg\frac{a_\ell - a_{\ell-1}}{a_{\ell-2} - a_{\ell-1}} = \arg\frac{z_1^{\ell-1}}{-z_1^{\ell-2}} = \arg(-z_1) = \pi + \frac{2\pi}{n} + 2\pi m$ （mは整数）

よって $\triangle P_\ell P_{\ell-1} P_{\ell-2}$ の面積は $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \left|\sin\left(\pi + \frac{2\pi}{n}\right)\right| = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}}$

(3) $z_1 - 1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} - 1 = -2\sin^2\frac{\pi}{n} + 2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\, i = 2\sin\frac{\pi}{n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right)\right)$

したがって $a_\ell = \frac{z^\ell - 1}{z_1 - 1} = (z^\ell - 1) \times \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)\right)$

より、$a_\ell$ は $z^\ell$ を1だけ平行移動した点を $2\sin\frac{\pi}{n}$ 倍に縮小し、$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ だけ回転させたものに相当する。

$z_1^1, z_1^2, z_1^3, \cdots z_1^{n-1}, z_1^n$ は原点を中心とした半径1の円上の点なので、$P_1, P_2 \cdots P_n$ の中心は

$\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left(\sin\frac{\pi}{n} + i\cos\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\tan\frac{\pi}{n}} i$

半径 $\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}$ の円で $\boldsymbol{\left|z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tan\frac{\pi}{n}} i\right| = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}}$

$z_1^1, z_1^2, \cdots z_1^n$ の n 個の点の作る正 n 角形の面積は $n \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin\frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ だから、

$P_1, P_2 \cdots P_n$ を頂点とする正 n 角形の面積は

$$\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \times \left(\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2 = \frac{2n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{8\sin^2\frac{\pi}{n}} = \boldsymbol{\frac{n}{4\tan\frac{\pi}{n}}}$$