大阪公立大学2023中期

1

(1) $f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}}a(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \times \cancel{2}x = \frac{ax}{\sqrt{x^2-1}}$

接線lは $y = \frac{at}{\sqrt{t^2-1}}(x-t) + a\sqrt{t^2-1} \Leftrightarrow y = \frac{at}{\sqrt{t^2-1}}x - \frac{a}{\sqrt{t^2-1}}$

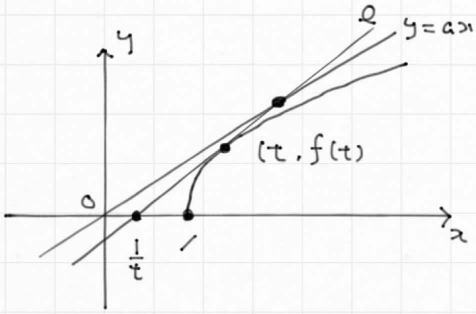
(2) $y=0$ を代入して $x = \frac{1}{t}$

(3) $\cancel{a}x = \frac{\cancel{a}t}{\sqrt{t^2-1}}x - \frac{\cancel{a}}{\sqrt{t^2-1}}$ $\quad x = \frac{1}{t-\sqrt{t^2-1}} = t+\sqrt{t^2-1}$ $\quad (x, y) = \left(t+\sqrt{t^2-1},\ at+a\sqrt{t^2-1}\right)$

(4) $S(t) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{t} \times \left(at + a\sqrt{t^2-1}\right)$

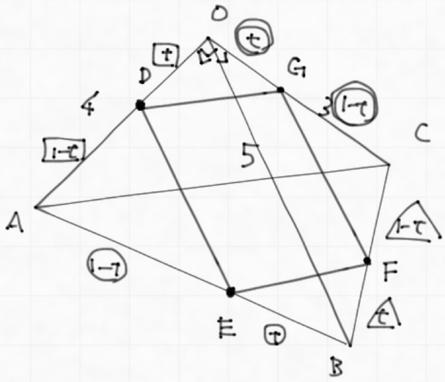
$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}$

(5) $\lim_{t\to\infty} S(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$



2

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ と表す.



(1) 条件より $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=3$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

$\overrightarrow{OD}=t\vec{a}$

$\overrightarrow{OE}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\overrightarrow{OF}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{OG}=t\vec{c}$

$\overrightarrow{DE}=(1-t)\vec{b}$, $\overrightarrow{GF}=(1-t)\vec{b}$ だから $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{GF}$ であり

四角形DEFGは平行四辺形

$|\overrightarrow{DE}|=5(1-t)$

$|\overrightarrow{DG}|^2=|t(\vec{c}-\vec{a})|^2=t^2(9+16)=25t^2$ $\quad |\overrightarrow{DG}|=5t$

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DG}=(1-t)\vec{b}\cdot\{t(\vec{c}-\vec{a})\}=t(1-t)(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b})=0$

よって DE⊥DG であり四角形DEFGは長方形

DEFGの面積は $5(1-t)\times 5t=\mathbf{25t(1-t)}$

(2) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+p\overrightarrow{DE}+q\overrightarrow{DG}$ と表せる

OH⊥α だから $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{DE}=0$ かつ $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{DG}=0$ なので

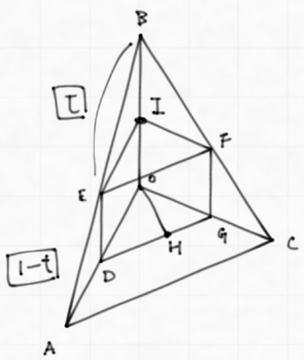
$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{DE}=(\overrightarrow{OD}+p\overrightarrow{DE}+q\overrightarrow{DG})\cdot\overrightarrow{DE}=(1-t)t\,\vec{a}\cdot\vec{b}+p|\overrightarrow{DE}|^2+q\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DG}=25p(1-t)^2=0$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{DG}=(\overrightarrow{OD}+p\overrightarrow{DE}+q\overrightarrow{DG})\cdot\overrightarrow{DG}=t\vec{a}\cdot(t(\vec{c}-\vec{a}))+p\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DG}+q|\overrightarrow{DG}|^2=-16t^2+25t^2q=0$

$p=0$, $q=\frac{16}{25}$ $\qquad\therefore \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\frac{16}{25}\overrightarrow{DG}$

$|\overrightarrow{OH}|^2=|\overrightarrow{OD}+\frac{16}{25}\overrightarrow{DG}|^2=t^2|\vec{a}|^2+\frac{32}{25}t\vec{a}\cdot(t(\vec{c}-\vec{a}))+\frac{16^2}{25^{\cancel{2}}}\times\cancel{25}t^2=16t^2-\frac{32\times16}{25}t^2+\frac{16^2}{25}t^2$

$=\frac{16}{25}t^2(25-32+16)=\frac{144}{25}t^2$ $\qquad\therefore |\overrightarrow{OH}|=\mathbf{\frac{12}{5}t}$



(3) E, Fを通ってOACと平行な平面とOBの交点をIとする

もとめる立体をIEFで分割.

左図下部の三角柱の体積は $\triangle OAC\times t^2\times(1-t)OB=30t^2(1-t)$

上部三角すいの体積は $\triangle IEF\times BI\times\frac{1}{3}=6t^2\times 5t\times\frac{1}{3}=10t^3$

よってもとめる体積は $30t^2-30t^3+10t^3=10t^2(3-2t)$

3

(1)(i) n回目の操作終了時点で壷の中に玉がはいっていないとき.

$n+1$回目の操作で「壷を空にする」か「0」のカードを引くと $n+1$回目後も玉は0個

$$p_n \times \frac{2}{5}$$

(ii) n回目の操作終了時点で壷の中に玉がはいっているとき

$n+1$回目の操作で「壷を空にする」のカードを引くと $n+1$回目後も玉は0個

$$(1-p_n) \times \frac{1}{5}$$

(i)(ii)より $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}(1-p_n)$ $\quad\therefore\ p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$

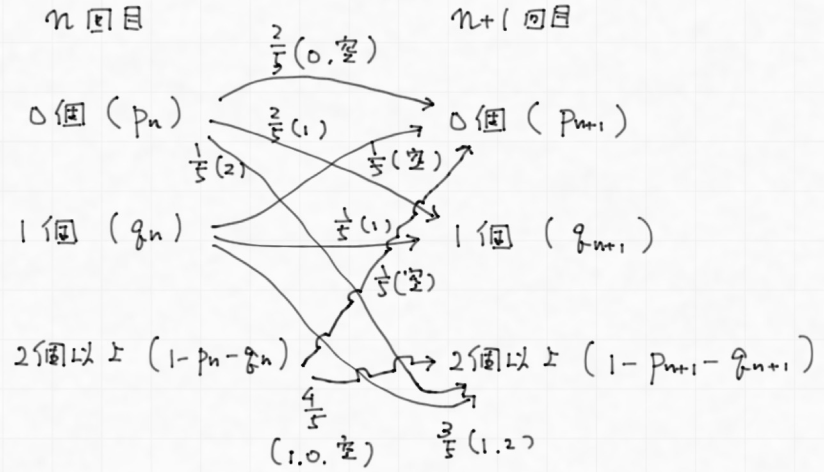
(2) $p_1 = \frac{2}{5}$

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} \quad\Leftrightarrow\quad p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

$\left\{p_n - \frac{1}{4}\right\}$は初項 $p_1 - \frac{1}{4}$, 公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列だから一般項は

$$p_n - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) \quad\Leftrightarrow\quad p_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4}$$

(3)



左の遷移図より

$$q_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}q_n$$

(4) (3)より $q_{n+1} = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}q_n$

$$5^{n+1}q_{n+1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{10}5^{n+1} + 5^n q_n$$

$$r_{n+1} = r_n + \frac{1}{2}5^n + \frac{3}{2} \qquad r_{n+1} - r_n = \frac{5^n+3}{2}$$

(5) $q_1 = \frac{2}{5}$ だから $r_1 = 2$

$n \geq 2$ のとき $r_n = r_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{5^n+3}{2} = 2 + \frac{5}{2}\times\frac{5^{n-1}-1}{5-1} + \frac{3}{2}(n-1) = \frac{1}{8}\cdot5^n + \frac{3}{2}n - \frac{1}{8}$

上式で $n=1$ とすると $r_1 = 2$ となるので上式は $n=1$ でも成り立つ

$$q_n = r_n \times \frac{1}{5^n} = \frac{12n-1}{8\cdot5^n} + \frac{1}{8}$$

4

(1) $f'(x) = 2e^{2x} + 10se^{x+1} + 2e^{2}$

$f'(x) = 0$ の方程式を考える.

$f'(x) = 0 \iff s = \dfrac{-e^{2x} - e^{2}}{5e^{x+1}} = -\dfrac{1}{5}e^{x-1} - \dfrac{1}{5}e^{-x+1}$

$-\dfrac{1}{5}e^{x-1} - \dfrac{1}{5}e^{-x+1} = g(x)$ とすると

$g'(x) = -\dfrac{1}{5}e^{x-1} + \dfrac{1}{5}e^{-x+1} = \dfrac{1}{5}e^{-x+1}(1 - e^{2x-2})$

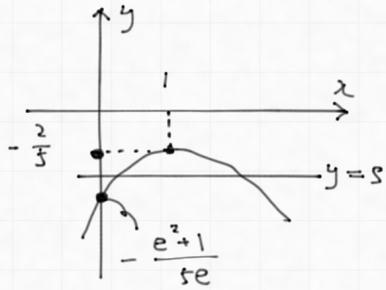
$g'(x) = 0$ となるのは $e^{2x-2} = 1$ すなわち $x = 1$ のときで

$g(x)$ の増減は右のようになる

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$		$-$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$g(1) = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5} = -\dfrac{2}{5}$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

だから $g(x)$ のグラフは右のようになる.



$y = g(x)$ のグラフと $y = s$ のグラフが異なる2点で

交わり, その前後でグラフの上下が入れ代わるとき,

$f'(x) = 0$ が解を持ち, その解の値で極値をもつ

よって、s の条件は $s < -\dfrac{2}{5}$ であり

$$\frac{t}{t^2+4t+9} < -\frac{2}{5}$$

$t^2 + 4t + 9 = (t+2)^2 + 5 > 0$ だから, 上の不等式は

$$5t < -2(t^2 + 4t + 9)$$

$$\iff 2t^2 + 13t + 18 < 0$$

$$\iff (2t+9)(t+2) < 0 \qquad \therefore \ \boldsymbol{-\frac{9}{2} < t < -2}$$

(2) $s = -\dfrac{1}{5}e^{x-1} - \dfrac{1}{5}e^{-x+1}$

$\iff e^{x-1} + 5s + e^{-x+1} = 0$

$e^{x-1} = X$ とすると $X + 5s + \dfrac{1}{X} = 0 \iff X^2 + 5sX + 1 = 0$

この式の解を, α, β とする $(\alpha < \beta)$ と. $\alpha = e^{x_1 - 1}$, $\beta = e^{x_2 - 1}$ と表せる

また解と係数の関係より. $\alpha + \beta = -5s$, $\alpha\beta = 1$

$L = e^{2x_1} + 10se^{x_1+1} + 2e^{2}x_1 + e^{2x_2} + 10se^{x_2+1} + 2e^{2}x_2$

$$= (e^{x_1}+e^{x_2})^2 - 2e^{x_1}e^{x_2} + 10se^2(e^{x_1-1}+e^{x_2-1}) + 2e^2(x_1+x_2)$$

$$= e^2(\alpha+\beta)^2 - 2e^2\alpha\beta + 10se^2(\alpha+\beta) + 2e^2(x_1+x_2)$$

$$= 25s^2e^2 - 2e^2 - 50s^2e^2 + 2e^2(x_1+x_2)$$

ここで　$\alpha\beta = e^{x_1-1}\cdot e^{x_2-1} = e^{-2}\cdot e^{x_1+x_2} \Leftrightarrow e^{x_1+x_2} = e^2$　より $x_1+x_2=2$

$L = \mathbf{-25s^2e^2+2e^2}$

(3)　(1)より　$-\frac{9}{2}<t<-2$

$$s = \frac{t}{t^2+4t+9} = \frac{1}{t+4+\frac{9}{t}} = \frac{1}{4-\left\{(-t)+\left(\frac{9}{-t}\right)\right\}}$$

ここで　$(-t)+\left(-\frac{9}{t}\right) \geqq 2\sqrt{\cancel{t}\times\frac{9}{\cancel{t}}} = 6$ だから　$4-\left\{(-t)+\left(-\frac{9}{t}\right)\right\} \leqq -2$　等号は $-t=-\frac{9}{t}$ より

$t=-3$

$\therefore\ s \geqq -\frac{1}{2}$

(1)の条件　$s<-\frac{2}{5}$ と併せて　$-\frac{1}{2} \leqq s < -\frac{2}{5}$

したがって　$\frac{4}{25} < s^2 \leqq \frac{1}{4}$　であり　L は $s^2=\frac{1}{4}$ で最小となり $L = \mathbf{-\frac{17}{4}e^2}$

このとき、等号条件より $t = \mathbf{-3}$

(4)　$t=-3$ のとき $s=-\frac{1}{2}$　，$f(x) = e^{2x}-5e^{x+1}+2e^2x$

$$I = \int_{x_1}^{x_2}(e^{2x}-5e^{x+1}+2e^2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}-5e^{x+1}+e^2x^2\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x_2}-5e^{x_2+1}+e^2x_2^2-\frac{1}{2}e^{2x_1}+5e^{x_1+1}-e^2x_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(e\beta)^2-5e^2\beta+e^2(x_2^2-x_1^2)-\frac{1}{2}(e\alpha)^2+5e^2\alpha$$

$$= \frac{1}{2}e^2(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)-5e^2(\beta-\alpha)+e^2(x_2^2-x_1^2)$$

ここで (2)より　α, β は $x^2-\frac{5}{2}x+1=0$ の解だから

$x^2-\frac{5}{2}x+1 = \frac{1}{2}(2x-1)(x-2)=0$　だから $\alpha=\frac{1}{2}, \beta=2$

$\alpha = e^{x_1-1}$ より　$x_1-1 = \log\frac{1}{2} = -\log 2+1$　同様に $x_2 = 1+\log 2$

$$I = \frac{1}{2}e^2\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)-5e^2\left(2-\frac{1}{2}\right)+e^2(1+\log 2-1+\log 2)(1+\log 2+1-\log 2)$$

$$= \frac{15}{8}e^2-\frac{15}{2}e^2+4e^2\log 2 = \mathbf{4e^2\log 2-\frac{45}{8}e^2}$$

5

(1) $I = \int_0^1 (3sx^4 + 35tx^2 + 15)^2\,dx$

$= \int_0^1 (9s^2x^8 + 35^2t^2x^4 + 15^2 + 210stx^6 + 90sx^4 + 1050tx^2)\,dx$

$= \left[s^2x^9 + 245t^2x^5 + 15^2x + 30stx^7 + 18sx^5 + 350tx^3 \right]_0^1$

$= \mathbf{s^2 + 245t^2 + 225 + 30st + 18s + 350t}$

(2) $I = s^2 + 2(15t+9)s + 245t^2 + 350t + 225$

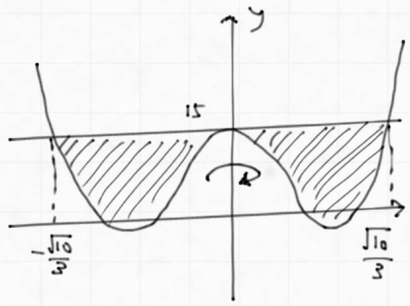
$= (s + 15t + 9)^2 + 20t^2 + 80t + 144$

$= (s + 15t + 9)^2 + 20(t+2)^2 + 64$

$s + 15t + 9 = 0$ かつ $t + 2 = 0$ すなわち $\mathbf{t = -2,\ s = 21}$ のとき I は最小値 64 をとる

(3) $f(x) = 63x^4 - 70x^2 + 15$

$f(x) = 15$ となるのは　$7x^2(9x^2 - 10) = 0$　　$x = 0,\ \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$



$V = \int_0^{\frac{\sqrt{10}}{3}} 2\pi x \cdot (15 - y)\,dx$

$= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{10}}{3}} (70x^3 - 63x^5)\,dx$

$= \cancel{2}\pi \left[\frac{35}{\cancel{2}}x^4 - \frac{21}{\cancel{2}}x^6 \right]_0^{\frac{\sqrt{10}}{3}}$

$= \pi\left(35 \times \frac{10^2}{3^4} - \cancel{21}^{7} \times \frac{10^3}{\cancel{3^6}\,3^5}\right) = \frac{10^2}{3^5}\pi(105 - 70)$

$= \mathbf{\frac{3500}{243}\pi}$