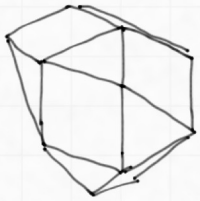
1

(1) 条件(b)より頂点を作る面の数は偶数に限られる。(奇数だと(b)に反し、辺を共有する合同な面が生じる)



2面では頂点はできず、6面だと、正三角形、正方形が3つずつ使われることになるが、その角の総和は360°を超えてしまうので頂点は作れない。

よって一つの頂点を共有する面は4となる(正三角形2、正方形2)

(2) 正三角形がx、正方形がy個使われているとする

条件(b)より $3x = 4y$

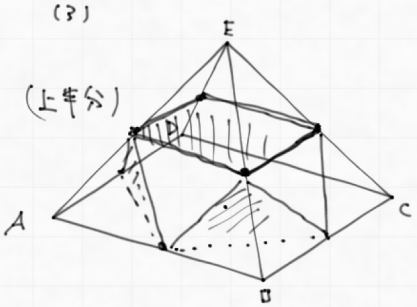
面の数 + 頂点の数 = 辺の数 +2 の関係より

$$x + y + \frac{3x+4y}{4} = \frac{3x+4y}{2} + 2$$

$$4x + \cancel{4y} + 3x + \cancel{4y} = 6x + \cancel{8y} + 8 \qquad x = 8 \qquad y = 6$$

正三角形 8個 正方形 6個

(3)

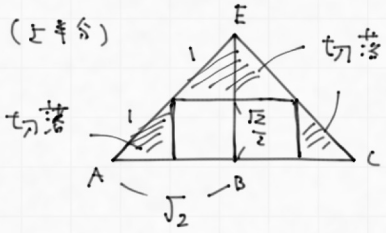


左は正八面体の上半分。

各辺の中点を結んで頂点を切り落とすことで6つの正方形が生じる(左図斜線部分)。

切り落とした後、正三角形が残る

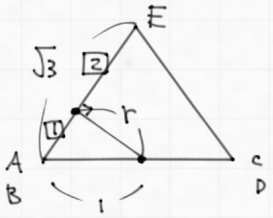
(4) 切り落とす前の正八面体の1辺の長さは2。



Bの半径は正八面体中心から△ABEの重心までの距離と等しい

真横から見た左図より 半径rは

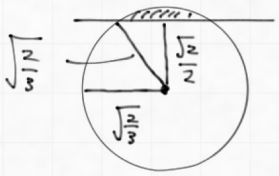
$$r = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$



これは中心から切り落とした正方形までの距離 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ よりも長い

$x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$ の円の回転体の体積から切り落とした部分の体積をもとめる

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \pi y^2 dx = \pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{2}{3} - x^2 dx = \pi \left[\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{4}{27}\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\pi$$

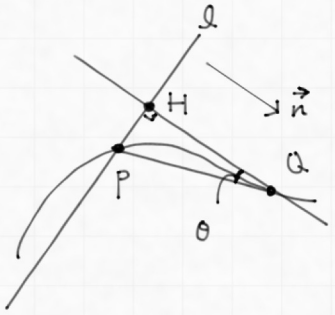


よってFとBの共通部分の体積は

$$\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - \left(\frac{4}{27}\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\right) \times 6$$

$$= \left(\frac{8\sqrt{6}}{27} - \frac{8}{9}\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\pi = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{16}{27}\sqrt{6}\right)\pi$$

2



(1) (i) Qがl上にあるとき　$Q=H$ だから $\overrightarrow{QH}=\vec{0}$

$PQ \parallel l$ だから　$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=0$　($\because$ $\vec{n}$はlと垂直)

よって $|\overrightarrow{QH}|=0$, $|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|=0$ であり　$|\overrightarrow{QH}|=|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|$が成り立つ.

(ii) Qがl上にないとき. 左のように $\angle PQH=\theta$ とすると.

$$|n\cdot\overrightarrow{PQ}|=\left||\vec{n}||\overrightarrow{PQ}|\cos\theta\right|=\left||\overrightarrow{PQ}|\cos\theta\right|=|\overrightarrow{QH}|$$

以上より　$|\overrightarrow{QH}|=|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|$ が成り立つことが示された.

(2) lがCの接線だったとき.

$\frac{dx}{dt}=f'(t)$, $\frac{dy}{dt}=g'(t)$　　$\vec{l}=(f'(t_0), g'(t_0))$ と表す.

$\vec{n}$と$\vec{l}$は互いに直交するので　$\vec{n}=\frac{1}{|\vec{l}|}(g'(t_0), -f'(t_0))$

$\overrightarrow{PQ}=(f(t)-f(t_0), g(t)-g(t_0))$

$f'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$, $g'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{g(t)-g'(t_0)}{t-t_0}$ だから

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}}{t-t_0}=\frac{1}{|\vec{l}|}(g'(t_0), -f'(t_0))\cdot(f'(t_0), g'(t_0))=0$$

$\lim_{t\to t_0}\left|\frac{\overrightarrow{PQ}}{t-t_0}\right|=|f'(t_0), g'(t_0)|=|\vec{l}|$ だから

$$\lim_{t\to t_0}\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|}=\lim_{t\to t_0}\frac{\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|t-t_0|}}{\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|t-t_0|}}=\frac{0}{|\vec{l}|}=0$$

逆に $\lim_{t\to t_0}\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|}=0$ のとき.

$$\lim_{t\to t_0}\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|}=\lim_{t\to t_0}\frac{\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|t-t_0|}}{\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|t-t_0|}}=\lim_{t\to t_0}\frac{\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}}{t-t_0}\right|}{\left|\frac{\overrightarrow{PQ}}{t-t_0}\right|}=0$$ となるのは

$\lim_{t\to t_0}(\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ})=0$ のときに限られ. これは $\vec{n}$がlの接線となることを示している.

以上より. lがPにおけるCの接線であるための必要十分条件は $\lim_{t\to t_0}\frac{|\overrightarrow{QH}|}{|\overrightarrow{PQ}|}=0$ であることが示された.

3

(1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと

$$a_n = z^n + \bar{z}^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n + (r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)))^n$$
$$= r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + r^n(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta))$$
$$= r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + r^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$
$$= 2r^n\cos(n\theta)$$

よって a_n は実数である.

(2) $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$a_{4k} = 2\sqrt{2}^{4k}\cos\left(\frac{\pi}{4}\times 4k\right) = 2^{2k+1}(-1)^k = \mathbf{2\cdot(-4)^k}$$

$$a_{4k+1} = 2\sqrt{2}^{4k+1}\cos\left(\frac{\pi}{4}\times(4k+1)\right) = 2\cancel{\sqrt{2}}\cdot 2^{2k}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}(-1)^k = \mathbf{2\cdot(-4)^k}$$

$$a_{4k+2} = 2\sqrt{2}^{4k+2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\times(4k+2)\right) = 2\cdot 2^{2k+1}\cos\left(k\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \mathbf{0}$$

$$a_{4k+3} = 2\sqrt{2}^{4k+3}\cos\left(\frac{\pi}{4}\times(4k+3)\right) = 4\sqrt{2}\cdot 2^{2k}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-1)^k = -4\cdot 4^k(-1)^k = \mathbf{(-4)^{k+1}}$$

(3) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ とおく

$a_{6k} = a_{6k+2}$ より

$$\cancel{2}r^{6k}\cos 6k\theta = \cancel{2}r^{6k+2}\cos(6k+2)\theta$$

$$\cos 6k\theta = r^2\cos(6k+2)\theta = r^2(\cos 6k\theta\cos 2\theta - \sin 6k\theta\sin 2\theta) \quad \cdots ①$$

これが0以上の全ての整数 k について成り立つ

$k=0$ のとき　$1 = r^2\cos 2\theta \cdots ②$　となり, これが必要.

このとき, ① は　$\sin 6k\theta\sin 2\theta = 0 \cdots ③$　となり, ② かつ ③ のとき, ① は k の値にかかわらず成り立つ

(i) $\sin 2\theta = 0$ のとき　$2\theta = m\pi$ より　$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

② より $\cos 2\theta = \frac{1}{r^2} > 0$ を満たすのは　$\theta = 0, \pi$

このとき $\cos 2\theta = 1$ なので $r^2 = 1$　$\therefore r = 1$.　$z = 1, -1$

(ii) $\sin 2\theta \neq 0$ のとき

③ が成り立つのは $\sin 6k\theta = 0$ が k の値にかかわらず成り立つときで

$6\theta = m\pi$ のときに限られる　$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi$　$(\because \sin 2\theta \neq 0)$

② より $\cos 2\theta = \frac{1}{r^2} > 0$ を満たすのは, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

このとき $\cos 2\theta = \frac{1}{2} = \frac{1}{r^2}$ より　$r = \sqrt{2}$

よって　$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right),\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$

$,\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right),\ \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right),\ \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right),\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

以上より

$$z = \pm 1,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$$　（複号任意）

4

(1) Cの焦点は $\sqrt{a^2-(a^2-1)}=1$ だから $(1,0),(-1,0)$

双曲線Dは$(b,0)$を頂点にもつことになるので $\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{c^2}=1$ と表せ、焦点が同じ

ということから $b^2+c^2=1^2$ $\therefore c^2=1-b^2$

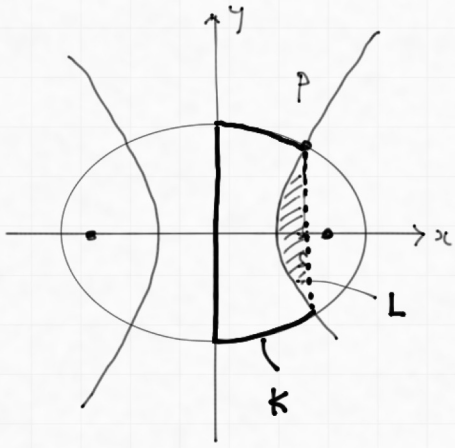
双曲線Dは $\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{1-b^2}=1$

C, Dを連立、$y^2=a^2-1-\dfrac{a^2-1}{a^2}x^2$ をDの式に代入 $\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{a^2-1-\frac{a^2-1}{a^2}x^2}{1-b^2}=1$

$\Leftrightarrow$ $(1-b^2)x^2-b^2\left(a^2-1-\dfrac{a^2-1}{a^2}x^2\right)=b^2(1-b^2)$

$\Leftrightarrow$ $(a^2-\cancel{a^2b^2}+\cancel{a^2b^2}-b^2)x^2=\cancel{a^2b^2}-a^2b^4+b^2a^4-\cancel{a^2b^2}$

$\Leftrightarrow$ $x^2=a^2b^2$ $\Leftrightarrow$ $x=\pm ab$



Pは第1象限にあるものなので $s=ab$

(2) Pのy座標をtとすると

$t^2=a^2-1-\dfrac{a^2-1}{\cancel{a^2}}\times\cancel{a^2}b^2=(a^2-1)(1-b^2)$

Pにおける Cの接線は $\dfrac{sx}{a^2}+\dfrac{ty}{a^2-1}=1$ その法線ベクトルは $\left(\dfrac{s}{a^2},\dfrac{t}{a^2-1}\right)$

Pにおける Dの接線は $\dfrac{sx}{b^2}-\dfrac{ty}{1-b^2}=1$ その法線ベクトルは $\left(\dfrac{s}{b^2},\dfrac{-t}{1-b^2}\right)$

2つのベクトルの内積をもとめる

$$\left(\frac{s}{a^2},\frac{t}{a^2-1}\right)\cdot\left(\frac{s}{b^2},\frac{-t}{1-b^2}\right)=\frac{s^2}{a^2b^2}-\frac{t^2}{(a^2-1)(1-b^2)}$$

$$=\cancel{a^2b^2}\times\frac{1}{\cancel{a^2b^2}}-\frac{1}{\cancel{(a^2-1)(1-b^2)}}\cancel{(a^2-1)(1-b^2)}=0$$

よって2つの接線は直交している

(3) $V_K=\displaystyle\int_0^{ab}\pi y^2\,dx=\pi\int_0^{ab}a^2-1-\frac{a^2-1}{a^2}x^2\,dx=\pi(a^2-1)\left[x-\frac{1}{3a^2}x^3\right]_0^{ab}=\boldsymbol{\pi(a^2-1)ab\left(1-\frac{b^2}{3}\right)}$

(4) $V_L=\displaystyle\int_b^{ab}\pi y^2\,dx=\pi\int_b^{ab}\frac{1-b^2}{b^2}x^2-1+b^2\,dx=\pi(1-b^2)\left[\frac{x^3}{3b^2}-x\right]_b^{ab}$

$$=\pi(1-b^2)\left(\frac{a^3\cancel{b^3}}{3\cancel{b^2}}-ab-\frac{\cancel{b^3}}{3\cancel{b^2}}+b\right)=\pi(1-b^2)\left(\frac{a^3b}{3}-ab+\frac{2}{3}b\right)$$

$s=1=ab$ より $b=\dfrac{1}{a}$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{V_L}{V_K}=\lim_{a\to\infty}\frac{\cancel{\pi}\cancel{\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}\left(\frac{a^2}{3}-1+\frac{2}{3a}\right)}{\cancel{\pi}\cancel{(a^2-1)}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\left(1-\frac{1}{3a^2}\right)}=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{a^2}{3}-1+\frac{2}{3a}}{a^2-\frac{1}{3}}=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{a^2}+\frac{2}{3a^3}}{1-\frac{1}{3a^2}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$