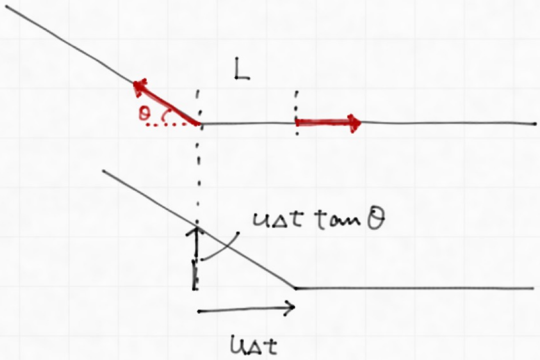
早稲田大学2023 理工

1

(1) $\rho u \Delta t$ ⓖ　(2) $T\sin\theta \fallingdotseq T\theta$ ⓗ

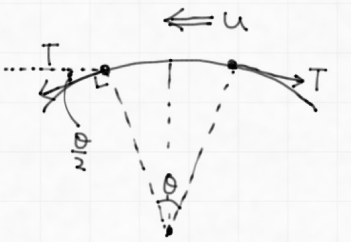


(3) 右図より Δt 秒間に x 方向に $u\Delta t$ だけすすむので

A点は $u\Delta t\tan\theta$ だけ y 方向にすすむ. すなわち速度は

$u\tan\theta \fallingdotseq u\theta$ ⓐ

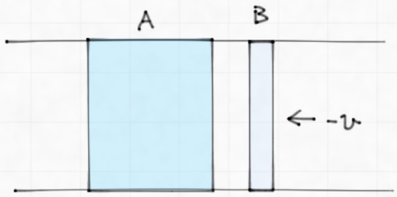
(4) $T\theta\Delta t = u\theta \times m$ より $u = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ ⓓ



(5) $-T\sin\frac{\theta}{2} \times 2 = -T\theta$ 大きさ $T\theta$ $-y$の向き ⓕ

(6) $r\theta \times \rho = \rho r\theta$ ⓔ

(7) $\rho \cancel{r}\theta \times \dfrac{u^2}{\cancel{r}} = T\theta$ より $u = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ ⓒ



(8) 気体塊Bの厚みさ d とすると $Sd = V_0$ より $d = \dfrac{V_0}{S}$

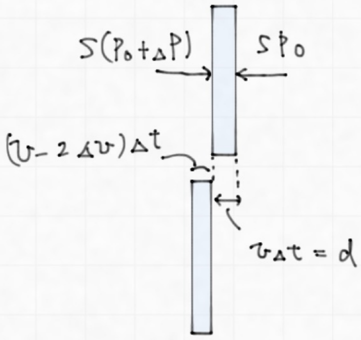
速度 $-v$ で移動するので. $\Delta t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{V_0}{vS}$ ⓑ

(9) $S(P_0+\Delta P) - SP_0 = S\Delta P$ ⓗ

(10) 平均速度は 面Cの速度は $-(v-2\Delta v)$ その平均速度は

$-\frac{1}{2}(v + v - 2\Delta v) = -v + \Delta v$ だから

$(v-\Delta v)\Delta t$ だけ移動する ⓒ



(11) 体積は $V_0\ (= Sd = Sv\Delta t)$ から

$V_0 + \Delta V\ (= S(v-\Delta v)\Delta t)$ に変化.

$\Delta V = -S\Delta v\Delta t = -\dfrac{V_0}{\cancel{v\Delta t}}\Delta v \cancel{\Delta t} = -\dfrac{\Delta v}{v}V_0$ ⓖ

(12) 力積 $S\Delta P \times \Delta t = \rho_0 V_0 \Delta v$ に (8). (11) を代入

$\cancel{S}\Delta P \cdot \dfrac{V_0}{v\cancel{S}} = \rho_0 \cancel{V_0}\left(-\dfrac{\Delta V v}{\cancel{V_0}}\right)$

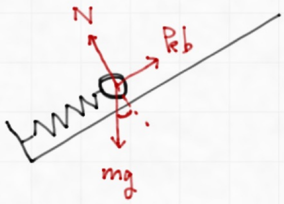
$v = \sqrt{-\dfrac{V_0\Delta P}{\rho_0\Delta V}}$ ⓐ

(13) 状態方程式 $P_0V_0 = \frac{w}{M}RT_0$ より $\rho_0 = \dfrac{w}{V_0} = \dfrac{P_0M}{RT_0}$

$v^2 = \dfrac{\alpha P_0}{\rho_0} = \dfrac{\alpha \cancel{P_0} R T_0}{\cancel{P_0} M} = \dfrac{\alpha R T_0}{M}$ ⓓ

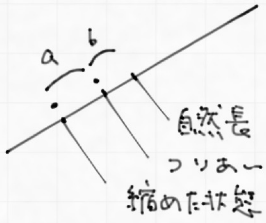
(14) $(3.4\times10^2)^2 = \dfrac{\alpha \times 8.3 \times \overset{100}{\cancel{290}}}{\cancel{2.9}\times10^{-2}}$ より $\alpha = \dfrac{11.56}{8.3} = 1.4 = \dfrac{7}{5}$ ⓕ

2



問1 力のつりあい

$kb = mg\sin\theta$ より $\quad b = \dfrac{mg}{k}\sin\theta$

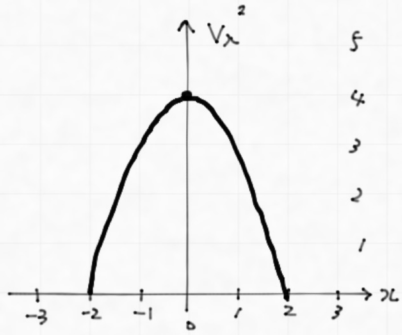


問2 エネルギー保存

$$\underbrace{\frac{1}{2}ka^2}_{\text{復元力のエネルギー}} = \frac{1}{2}mV_b^2 \text{ より} \quad V_b = a\sqrt{\frac{k}{m}}$$

問3 $\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mV_x^2 = \frac{1}{2}ka^2$ より $V_x^2 = \dfrac{k(a^2-x^2)}{m}$

数値を代入して $V_x^2 = 4 - x^2$ グラフは左のとおり



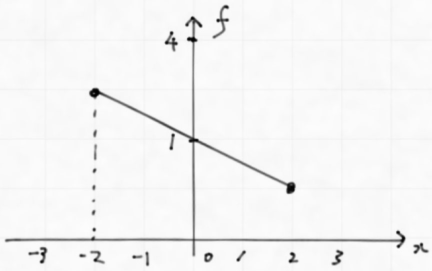
問4 $A = -mg\sin\theta$

$B = k(4-x)$

$$f = \frac{|B|}{|A|} = \frac{k(4-x)}{mg\sin\theta} = 1 - \frac{x}{4}$$

$a = 2$ だから $-2 \leqq x \leqq 2$

グラフは左のとおり



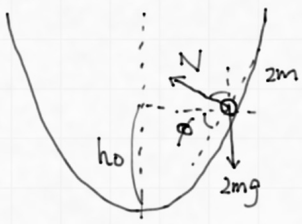
問5
$$\begin{cases} 2m\dfrac{V_0^2}{r} = N\sin\phi \\ N\cos\phi = 2mg \\ h_0 = ar^2 \end{cases}$$

$$\cancel{2m}\frac{V_0^2}{r} = \cancel{2m}g\tan\phi$$

$$V_0^2 = rg\tan\phi$$

$$= r\cdot g\cdot 2ar = 2gh_0$$

$$\therefore V_0 = \sqrt{2gh_0}$$



問6 運動量保存 $2mV_0 = mV_a + mV_b$

エネルギー保存 $\frac{1}{2}\cdot 2mV_0^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mV_a^2 + \frac{1}{2}mV_b^2$

$V_b = 2V_0 - V_a$ を後者に代入

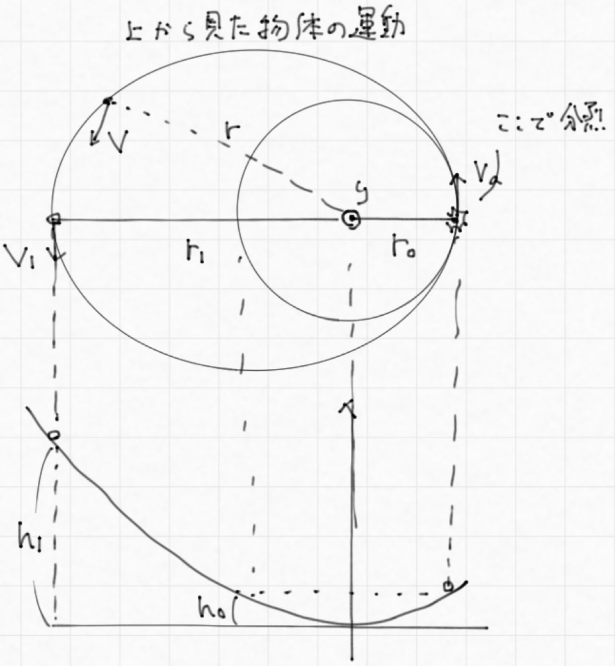
$$2\cancel{m}V_0^2 + \cancel{\frac{1}{2}}\frac{k}{m}d^2 = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}V_a^2 + \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}(2V_0 - V_a)^2$$

$$2V_0^2 + \frac{k}{m}d^2 = V_a^2 + 4V_0^2 - 4V_0V_a + V_a^2$$

$$V_a^2 - 2V_0V_a + V_0^2 - \frac{k}{2m}d^2 = 0$$

$$V_a = V_0 + \sqrt{V_0^2 - V_0^2 + \frac{k}{2m}d^2} = V_0 + d\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$$V_b = V_0 - d\sqrt{\frac{k}{2m}}$$



問7　エネルギー保存

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mV_a^2 = mgh_1 + \frac{1}{2}mV_1^2$$

面積速度一定

$$\frac{1}{2}r_0V_a = \frac{1}{2}r_1V_1$$

この2式と $h_1 = ar_1^2$, $h_0 = ar_0^2$ を連立

$$\cancel{m}gh_0 + \frac{1}{2}\cancel{m}V_a^2 = \cancel{m}gh_1 + \frac{1}{2}\cancel{m}\left(\frac{r_0}{r_1}V_a\right)^2$$

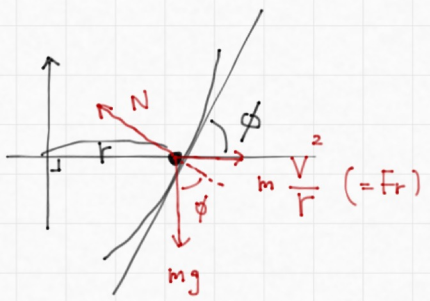
$$gh_0 + \frac{1}{2}V_a^2 = gh_1 + \frac{h_0}{2h_1}V_a^2$$

$$g(h_1-h_0) + \frac{1}{2}V_a^2\left(\frac{h_0}{h_1}-1\right) = 0$$

$h_1 \neq h_0$ だから h_1-h_0 で両辺割って

$$g - \frac{1}{2}V_a^2\frac{1}{h_1} = 0 \qquad h_1 = \frac{V_a^2}{2g}$$

このとき $V_1 = \frac{r_0}{r_1}V_a = \sqrt{\frac{h_0}{h_1}}V_a = \sqrt{2gh_0}$



問8　$A = mg\sin\phi$, $B = m\frac{V^2}{r}\cos\phi$

$$f = \frac{m\frac{V^2}{r}\cos\phi}{mg\sin\phi} = \frac{V^2}{gr\tan\phi} = \frac{V^2}{gr\cdot 2ar} = \frac{V^2}{2gh}$$

また面積速度の関係より $\frac{1}{2}rV = \frac{1}{2}r_1V_1$ が成り立つので

$$f = \frac{\left(\frac{r_1}{r}V_1\right)^2}{2gh} = \frac{V_1^2}{2gh}\times\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 = \frac{\cancel{2g}h_0}{\cancel{2g}h}\times\frac{h_1}{h} = \frac{h_0h_1}{h^2}$$

エネルギー保存　$\frac{1}{2}mV_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mV_2^2 + mgh$

ここに $V_1 = \sqrt{2gh_0}$, $h_1 = \frac{V_a^2}{2g}$ などを代入

$$\overset{2}{\cancel{m}}gh_0 + \overset{2}{\cancel{m}}gh_1 = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\times 2gh_0 + \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}V_2^2 + \overset{2}{\cancel{m}}gh$$

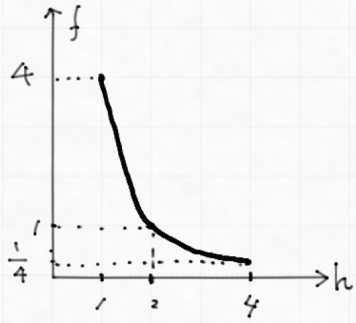
$$V_2^2 = 2gh_0 + 2gh_1 - \frac{h_1}{h}\times 2gh_0 - 2gh = \frac{2g(h_0h + h_1h - h_0h_1 - h^2)}{h} = \frac{2g\,H_1\,H_2}{h}$$

問9　A=Bのとき $f = 1 = \frac{h_0h_1}{h^2}$　　$h = \sqrt{h_0h_1}$ $(=h_2)$

$V_2^2 = \frac{2g}{h_2}(h_2-h_0)(h_1-h_2)$ に $h_1 = ar_1^2$. $h_0 = ar_0^2$ を代入

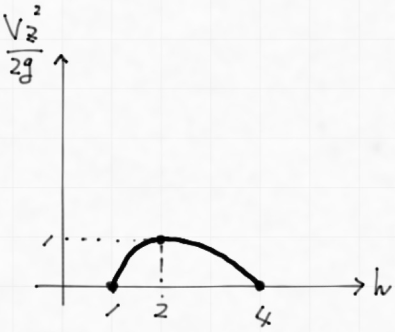
$$= \frac{2g}{\cancel{a}\cancel{r_1}\cancel{r_0}}(a\cancel{r_0}r_1 - ar_0^{\cancel{2}})(\cancel{a}r_1^{\cancel{2}} - \cancel{a}\cancel{r_1}r_0) = 2ag(r_1-r_0)^2 = 2agR^2$$

問10 $V_0=\sqrt{2g\cdot 1}=\sqrt{2g}$, $h_1=\frac{(2V_0)^2}{2g}=\frac{2\times 2g}{g}=4$, $f=\frac{1\cdot 4}{h^2}=\frac{4}{h^2}$



$h_0 \leqq h \leqq h_1$ だから $1 \leqq h \leqq 4$

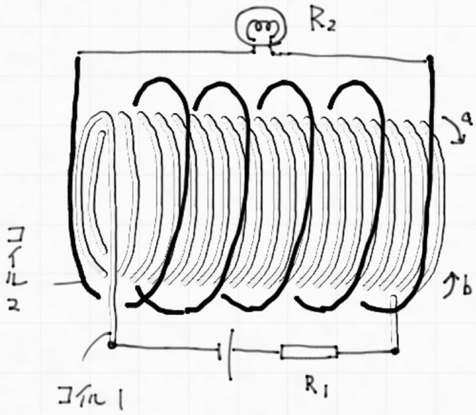
$$\frac{V_2^2}{2g}=\frac{\cancel{2g}(h-1)(4-h)}{\cancel{2g}h}=\frac{-h^2+5h-4}{h}=-h+5-\frac{4}{h}$$



問10 エネルギーが保存しているので最高点まで上がった後は最下点h_0まで戻り、その後もy軸のまわりを周回し続ける

3

問1　$H = \frac{N_1}{d}(\alpha t)$, $B = \mu_0 H$, $\Phi_1 = BS_1 = \frac{\mu_0 \alpha N_1 S_1 t}{d} = \Phi_2$



問2　(右図で) 電流はaの向きに流れているので磁場は右向き.
これが増加するのを妨げる向きの電流がコイル2に流れるので向きは右図でbの向き. (左から見たとき反時計まわり)

起電力の大きさをVとして

$$V = N_2 \frac{\Delta \Phi_2}{\Delta t} = N_2 \times \frac{\mu_0 \alpha N_1 S_1}{d}$$

$$I_2 = -\frac{V}{R_2} = -\frac{\mu_0 \alpha N_1 N_2 S_1}{R_2 d}$$

問3　コイル1の回路の式は　$V(t) - N_1 \times \frac{\mu_0 \alpha N_1 S_1}{d} = \alpha t R_1$

$$V(t) = \overset{(1)}{\alpha R_1}\, t + \overset{(2)}{\frac{\mu_0 \alpha N_1^2 S_1}{d}}$$

問4　電源の供給するエネルギー　$U_E = \int_{T_0}^{2T_0} V(t)\alpha t\, dt = \int_{T_0}^{2T_0} \alpha^2 R_1 t^2 + \frac{\mu_0 \alpha^2 N_1^2 S_1}{d} t\, dt$

$$= \left[\frac{1}{3}\alpha^2 R_1 t^3 + \frac{\mu_0 \alpha^2 N_1^2 S_1}{2d} t^2 \right]_{T_0}^{2T_0} = \frac{7}{3}\alpha^2 R_1 T_0^3 + \frac{\mu_0 \alpha^2 N_1^2 S_1}{2d} 3T_0^2$$

抵抗R1で消費されるエネルギー　$U_{R_1} = \int_{T_0}^{2T_0} (\alpha t)^2 R_1 dt = \frac{7}{3}\alpha^2 R_1 T_0^3$

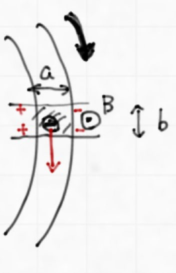
抵抗R2で消費されるエネルギー　$U_{R_2} = I_2^2 R_2 T_0 = \frac{\mu_0^2 \alpha^2 N_1^2 N_2^2 S_1^2}{R_2 d^2} T_0$

コイルのエネルギーの増加量　$\Delta U_L = U_E - U_{R_1} - U_{R_2}$

$$= \cancel{\frac{7}{3}\alpha^2 R_1 T_0^3} + \frac{\mu_0 \alpha^2 N_1^2 S_1}{2d} 3T_0^2 - \cancel{\frac{7}{3}\alpha^2 R_1 T_0^3} - \frac{\mu_0^2 \alpha^2 N_1^2 N_2^2 S_1^2}{R_2 d^2} T_0$$

$$= \frac{3\mu_0 \alpha^2 N_1^2 S_1 T_0^2}{2d} - \frac{\mu_0^2 \alpha^2 N_1^2 N_2^2 S_1^2 T_0}{R_2 d^2}$$

左から見た図



問5　$V = A\omega_0 \times aB = a\omega_0 AB$　向きは左手の法則で電子の受ける力の向きを考えて判断する

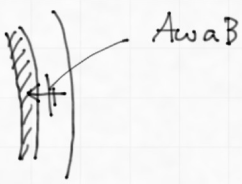
問6　小領域の動径方向の抵抗値は　$\rho \times \frac{a}{bc}$ (Ω) だから

$$I_0 = \frac{V}{\frac{\rho a}{bc}} = \frac{bc}{\rho \cancel{a}} \cancel{a} \omega_0 AB = \frac{bcAB\omega_0}{\rho}$$

問7　小領域を流れる電流が磁場から受ける力は　$BI_0 \times a$ (N) だから. この力のする仕事は

$$Ba \frac{bcAB\omega_0}{\rho} \times A\cancel{\omega_0} \times \frac{2\pi}{\cancel{\omega_0}} = \frac{2\pi abcA^2B^2\omega_0}{\rho}$$

問8



時間帯I　$V = ABa\frac{\omega_0}{2T}t$ …誘導起電力

$I_0 = \frac{bcAB\omega_0}{\rho}$，$r = \frac{\rho a}{bc}$，だから

$$V = I_0 r \frac{t}{2T}$$

回路の式は

$$I_0 r\frac{t}{2T} - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = Ir$$

$I = k_1 t + k_2$ としてこれを代入　… 問題文で1次式と説明されていた.

$$\frac{I_0 r}{2T}t - Lk_1 = k_1 r t + k_2 r$$

$$\frac{I_0 r}{2T} = k_1 r \quad , \quad -Lk_1 = k_2 r$$

$$\therefore\ k_1 = \frac{I_0}{2T} \quad , \quad k_2 = -\frac{L}{r}\times k_1 = \frac{-LI_0}{2Tr}$$

$$I = \overset{(3)}{\frac{I_0}{2T}}t + \overset{(4)}{\left(-\frac{LI_0}{2Tr}\right)}$$

時間帯IIのとき.　$V = ABa\omega$，$\omega = 5\omega_0 - \frac{\omega_0}{T}t$ より

$$V = ABa\left(5\omega_0 - \frac{\omega_0}{T}t\right) = I_0 r\left(5 - \frac{t}{T}\right)$$

回路の式は

$$I_0 r\left(5 - \frac{t}{T}\right) - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = Ir$$

これを先と同様に $I = k_1 t + k_2$ とおくことで解くと.　$I = \overset{(5)}{-\frac{I_0}{T}}t + \overset{(6)}{I_0\left(5 + \frac{L}{Tr}\right)}$

問9　時間帯I …　$-M\frac{\Delta I}{\Delta t} = iR$ より　$i = -\frac{M}{R}\times\frac{I_0}{2T} = -\frac{MI_0}{2RT}$

〃 II　　$i = -\frac{M}{R}\left(-\frac{I_0}{T}\right) = \frac{MI_0}{RT}$

※向きについて. 時間帯Iのとき小領域の電流によってコイルには紙面表から裏の向きの磁束が増加、それを妨げるためコイルには反時計まわりの電流が流れている.

問10　$P = i^2R$ だから電流が2倍になっているので 4倍