近畿大 A日程 2023

(1) 15以下の素数が並ぶ　2, 3, 5, 7, 11, 13　　$p_4=7$　$p_6=13$

(2) 1〜15のうち $p_1(=2)$ の倍数は　$15\div2=7\cdots1$ で 7つ

$p_1^2=2^2$の倍数は　$15\div2^2=3\cdots3$ で 3つ

$p_1^3=2^3$の倍数は　$15\div2^3=1\cdots7$ で 1つ

$p_1^4=2^4$の倍数は　$2^4>15$ だからない。

$$m_1=(7-3)\times1+(3-1)\times2+1\times3=7+3+1=\mathbf{11}$$

以下同様に考える

$15\div3=5\cdots0$　　$15\div3^2=1\cdots6$　　$15<3^3$　　$m_2=5+1=\mathbf{6}$

$15\div5=3\cdots0$　　$15<5^2$　　$m_3=\mathbf{3}$

(3) $11x-13y=1$ の解の1つとして　$x=6,\ y=5$ が考えられ、

$11\cdot6-13\cdot5=1$ が成り立つ。これらの2式を辺々引いて

$$\begin{array}{rl} & 11x-13y=1 \\ -) & 11\cdot6-13\cdot5=1 \\ \hline & 11(x-6)-13(y-5)=0 \end{array}\quad\Leftrightarrow\quad 11(x-6)=13(y-5)$$

ここで上式右辺が13の倍数だから $x-6$ は13の倍数であり $x-6=13k$ と表せ、このとき

$y-5=11k$ となるので　$(x,y)=(13k+6,\ 11k+5)$　(kは整数)

$1\leqq13k+6\leqq1000$，$1\leqq11k+5\leqq1000$

を同時に満たす整数 k は　$0,1,2,\ldots,76$ の **77**個あり。

最小のものは $k=0$ のときの　$(x,y)=(\mathbf{6},\mathbf{5})$

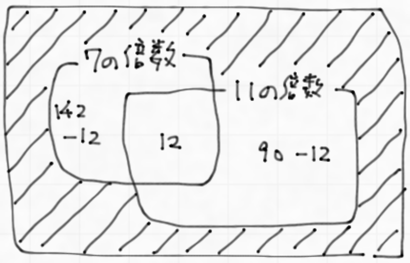
最大のものは $k=76$ のときの　$(x,y)=(\mathbf{994},\mathbf{841})$

(4) $p_4=7$, $p_5=11$

7の倍数は　$1000\div7=142\cdots6$　142コ

11　〃　　$1000\div11=90\cdots10$　90コ

7×11　〃　　$1000\div77=12\cdots76$　12コ



7×11と互いに素なものは右図斜線部に相当し、

$1000-(142-12)-(90-12)-12$

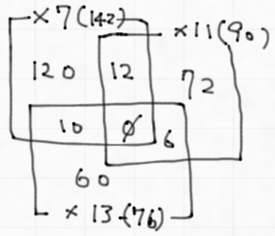
$=1000-142-90+12=\mathbf{780}$ 個

13の倍数　$1000\div13=76\cdots12$　76コ

7・13　〃　$1000\div91=10\cdots90$　10コ

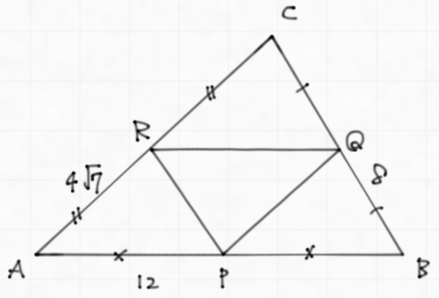
11・13　〃　$1000\div143=6\cdots142$　6コ

7・11・13　〃　$1000<7\times11\times13$　なし



$1000-120-72-60-12-10-6=\mathbf{720}$ 個

11



(1) APとBPがOPを展開したものになるので $AP=BP=6$ [ア]

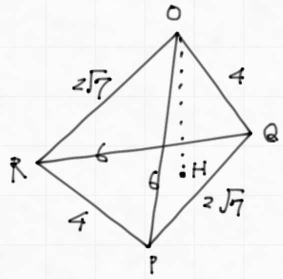
同様に $BQ=QC$, $CR=RA$で。PQはCB. CAの中点を結んだ線分となり. $QR=\frac{1}{2}AB=6$ [イ]

同様に $RP=\frac{1}{2}BC=4$. $PQ=\frac{1}{2}CA=2\sqrt{7}$

$$\cos\angle PQR=\frac{PQ^2+RQ^2-PR^2}{2PQ\cdot RQ}=\frac{28+36-16}{2\cdot 2\sqrt{7}\cdot 6}=\frac{\cancel{48}^{\,2}}{\cancel{24}\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$ [ウエオ]

$$\sin\angle PQR=\sqrt{1-\frac{4}{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\times PQ\times RQ\times\sin\angle PQR=\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\cancel{\sqrt{7}}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{7}}}=6\sqrt{3}$$ [カキ]



(2) 対応関係から $\angle POQ=\angle PBQ$

$$\cos\angle PBQ=\frac{6^2+4^2-(2\sqrt{7})^2}{2\cdot 6\cdot 4}=\frac{\cancel{36+16-28}}{\cancel{2\cdot 6\cdot 4}}=\frac{1}{2}\qquad \angle PBQ=60^\circ$$

$$\vec{OP}\cdot\vec{OQ}=\vec{BP}\cdot\vec{BQ}=6\times 4\times\cos 60^\circ=12$$ [クケ]

$$\cos\angle QCR=\frac{16+28-6^2}{2\cdot 4\cdot 2\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}\qquad \vec{OQ}\cdot\vec{OR}=\vec{CQ}\cdot\vec{CR}=4\cdot 2\sqrt{7}\times\frac{1}{2\sqrt{7}}=4$$ [コ]

$$\vec{OR}\cdot\vec{OP}=\vec{AR}\cdot\vec{AP}=2\sqrt{7}\times 6\times\sin\angle PQR=2\cancel{\sqrt{7}}\cdot 6\cdot\frac{2}{\cancel{\sqrt{7}}}=24$$ [サシ]

(3) $\vec{OH}=p\vec{OP}+q\vec{OQ}+r\vec{OR}$　　$p+q+r=1$ [ス] …①

$$\vec{OH}\cdot\vec{PQ}=(p\vec{OP}+q\vec{OQ}+r\vec{OR})\cdot(\vec{OQ}-\vec{OP})$$

$$=12p-p\cdot 36+q\cdot 16-12q+r\cdot 4-24r=-24p+4q-20r=0$$

$6p-q+5r=0$ …②

$$\vec{OH}\cdot\vec{PR}=(p\vec{OP}+q\vec{OQ}+r\vec{OR})\cdot(\vec{OR}-\vec{OP})=24p-36p+4q-12q+28r-24r=0$$

$-3p-2q+r=0$ …③

①②③より $p=-\frac{1}{3}$ [セソタ]　$q=\frac{7}{9}$ [チツ]　$r=\frac{5}{9}$ [テト]

(4) $\vec{OP}=\vec{p}$. $\vec{OQ}=\vec{q}$. $\vec{OR}=\vec{r}$ と表す.

$$|\vec{OH}|^2=\left(\frac{1}{9}\right)^2|-3\vec{p}+7\vec{q}+5\vec{r}|^2=\frac{1}{81}(9\cdot 36+49\cdot 16+25\cdot 28-42\cdot 12-30\cdot 24+70\cdot 4)$$

$$=\frac{4}{81}(81+\underbrace{196+175-126}_{70}\underbrace{-\cancel{180}+70}_{-40})=\frac{4\cdot\cancel{216}\,\cancel{24}\,8}{\cancel{81}\,\cancel{9}\,3}=\frac{32}{3}$$

$$|\vec{OH}|=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$OPQR=\triangle PQR\times|\vec{OH}|\times\frac{1}{3}=\cancel{6}^{\,2}\cancel{\sqrt{3}}\times\frac{4\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}}\times\frac{1}{\cancel{3}}=8\sqrt{2}$$ [ナニ]

111 $f(x)=2x^3-(3k+1)x^2+2kx$

(1) $f(0)=\mathbf{0}$ ア　　$f(x)=x\left(2x^2-(3k+1)x+2k\right)$

〜〜部を $g(x)$ として $g(x)=0$ が解を持たないとき、$f(x)=0$ は $x=0$ のみを解にもつ

$g(x)=0$ の判別式を D として

$$D=(3k+1)^2-4\cdot2\cdot2k=9k^2-10k+1<0 \iff (9k-1)(k-1)<0 \iff \overset{イウ}{\frac{1}{9}}<k<\overset{エ}{1}$$

(2) $f'(x)=6x^2-2(3k+1)x+2k$

(i)

$f'(x)=0$ が異なる2つの正の実数解をもつとき、$f(x)$ は題意の極値をもつことになるので

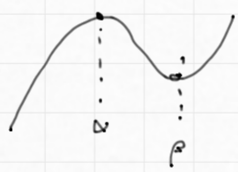
$f'(x)=0$ の判別式を D_2 として

$$\frac{D_2}{4}=(3k+1)^2-6\cdot2k=9k^2-6k+1>0 \iff (3k-1)^2>0 \iff k\neq\frac{1}{3}$$

$f'(0)=2k>0 \iff k>0$

軸 $=\dfrac{3k+1}{6}>0 \iff k>-\dfrac{1}{3}$

以上をまとめて　$\overset{オ}{0}<k<\overset{カキ}{\frac{1}{3}},\ \overset{クケ}{\frac{1}{3}}<k$



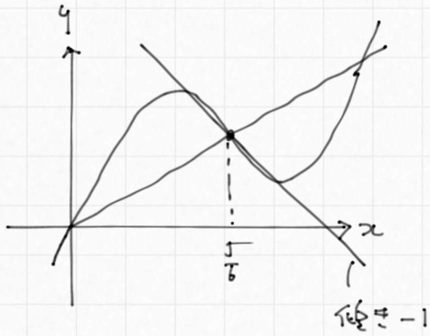
(ii) 解と係数の関係より $\alpha+\beta=\frac{1}{3}(3k+1)$, $\alpha\beta=\frac{1}{3}k$

l の傾きは

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{2(\beta^3-\alpha^3)-(3k+1)(\beta^2-\alpha^2)+2k(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-(3k+1)(\beta+\alpha)+2k$$

$$=2\left\{\left(\frac{3k+1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}k\right\}-(3k+1)\times\frac{3k+1}{3}+2k=-\frac{1}{9}(3k+1)^2+\frac{4}{3}k$$

$$=-k^2+\frac{2}{3}k-\frac{1}{9}$$ コサシスセ



(iii) $k=\frac{4}{3}$ のとき $f(x)=2x^3-5x^2+\frac{8}{3}x$

$f'(x)=6x^2-10x+\frac{8}{3}$, $f''(x)=12x-10$

変曲点は $f''(x)=0$ を解いて $x=\frac{5}{6}$

$$f\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{250}{6^3}-\frac{125}{6^2}+\frac{20}{9}=\frac{250-750+480}{6^3}=-\frac{20}{6^3}$$

m の傾きは $\dfrac{f(\frac{5}{6})-0}{\frac{5}{6}-0}=-\dfrac{\cancel{20}\,4}{6^{\cancel{3}\,2}}\times\dfrac{\cancel{6}}{\cancel{5}}=-\dfrac{1}{9}$ ソタチ　　l と m の交点は変曲点だから $x=\dfrac{5}{6}$ ツテ

l の傾きは (ii)の結果より $-\left(\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{9}=-\frac{16}{9}+\frac{8}{9}-\frac{1}{9}=-1$ なので

m の偏角を φ とすると $\theta=\varphi+45^\circ$　$\tan\theta=\tan(\varphi+45^\circ)=\dfrac{\tan\varphi+1}{1-\tan\varphi}=\dfrac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\dfrac{4}{5}$ トナ