京都大学2023

1 (1) (ア) $\frac{1}{2}m(u^2+v^2)$ (イ) $-G\frac{Mm}{r}$

(ウ) 面積速度一定の法則より $v=\frac{2S}{r}$ だから

$$E=\frac{1}{2}m(u^2+v^2)-G\frac{Mm}{r}=\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{2S}{r}\right)^2-G\frac{Mm}{r} \qquad \therefore V(r)=\frac{2mS^2}{r^2}-\frac{GMm}{r}$$

問1 $V(r)=\frac{m}{r}\left(\frac{2S^2}{r}-GM\right)$

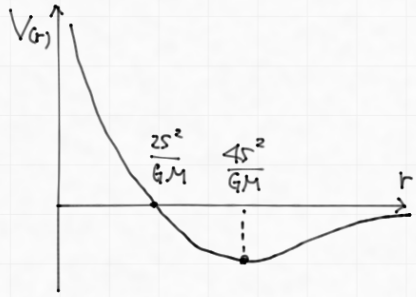
$r\to\infty$ のとき、$\frac{m}{r}\to 0$ だから $V(r)\to 0$ 、$r\to 0$ のとき、$\frac{2S^2}{r}-GM\to\infty$ だから $V(r)\to\infty$

$$\frac{dV}{dr}=\frac{-4mS^2}{r^3}+\frac{GMm}{r^2}=\frac{m(GMr-4S^2)}{r^3}$$

$V(r)=0$ を解くと $r=\frac{2S^2}{GM}$

$\frac{dV}{dr}=0$ を解くと $r=\frac{4S^2}{GM}$

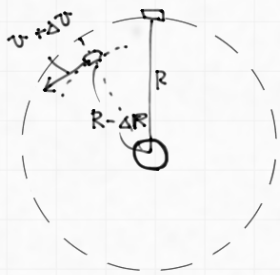
以上より、$V(r)$ のグラフは右のようになる



(2) (エ) 円運動の運動方程式 $m\frac{v^2}{R}=G\frac{Mm}{R^2}$ より $v=\sqrt{G\frac{M}{R}}$

周期 $T=\frac{2\pi R}{v}=2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$

(オ) 面積速度一定の法則より、



$$\frac{1}{2}vR=\frac{1}{2}(v+\Delta v)(R-\Delta R)\fallingdotseq\frac{1}{2}vR-\frac{1}{2}v\Delta R+\frac{1}{2}\Delta vR$$

$$\Delta v=v\frac{\Delta R}{R}$$

(カ) 万有引力の増分 $=G\frac{Mm}{(R-\Delta R)^2}-G\frac{Mm}{R^2}=GMm\left\{R^{-2}\left(1-\frac{\Delta R}{R}\right)^{-2}-R^{-2}\right\}$

$$\fallingdotseq\frac{GMm}{R^2}\left(1+2\frac{\Delta R}{R}-1\right)=\frac{2GMm}{R^3}\Delta R$$

(キ) 遠心力の増分 $=m\frac{(v+\Delta v)^2}{R-\Delta R}-m\frac{v^2}{R}=m\frac{v^2}{R}\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^2\left(1-\frac{\Delta R}{R}\right)^{-1}-m\frac{v^2}{R}$

$$\fallingdotseq m\frac{v^2}{R}\left(\left(1+\frac{2\Delta v}{v}\right)\left(1+\frac{\Delta R}{R}\right)-1\right)=m\frac{v^2}{R}\left(\frac{2\Delta v}{v}+\frac{\Delta R}{R}\right)=m\frac{v^2}{R}\left(\frac{2}{v}\times\left(v\frac{\Delta R}{R}\right)+\frac{\Delta R}{R}\right)$$

$$=\frac{3mv^2}{R^2}\Delta R=\frac{3m}{R^2}\times G\frac{M}{R}\Delta R=\frac{3GMm}{R^3}\Delta R$$

(ク) 万有引力の増分 − 遠心力の増分 $=\frac{2GMm}{R^3}\Delta R-\frac{3GMm}{R^3}\Delta R=-\frac{GMm}{R^3}\Delta R$

(ケ) $ma_R=-\frac{GMm}{R^3}\Delta R=-m\Delta R\omega^2$ より $\omega=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{GM}{R}}$ $t=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$ $\therefore\frac{t}{T}=1$

(3) (コ) 運動方程式 $m\frac{v^2}{R}=\frac{Am}{R^k}$ より $v=\sqrt{\frac{A}{R^{k-1}}}$

(サ) 引力の大きさの増分 $=\frac{Am}{(R-\Delta R)^k}-\frac{Am}{R^k}=\frac{Am}{R^k}\left\{\left(1-\frac{\Delta R}{R}\right)^{-k}-1\right\}=\frac{Am}{R^k}\times\frac{k\Delta R}{R}=\frac{Amk}{R^{k+1}}\Delta R$

(シ) 遠心力の増分 $=m\frac{(v+\Delta v)^2}{R-\Delta R}-m\frac{v^2}{R}=m\frac{v^2}{R}\times 3\frac{\Delta R}{R}=\frac{3m}{R^2}\times\frac{A}{R^{k-1}}\Delta R=\frac{3mA}{R^{k+1}}\Delta R$

引力の大きさの増分 − 遠心力の増分 $=\frac{Amk}{R^{k+1}}\Delta R-\frac{3mA}{R^{k+1}}\Delta R=-\frac{mA}{R^{k+1}}(3-k)\Delta R$

(ス) 復元力となるのは上記の力が負となるときだから $3-k>0$ すなわち $k<3$ が条件となる

$$m a_R = -\frac{mA}{R^{k+1}}(3-k)\Delta R = -m\Delta R\omega^2 \text{より} \quad \omega = \sqrt{\frac{(3-k)A}{R^{k+1}}}$$

$$t_x = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^{k+1}}{(3-k)A}}$$

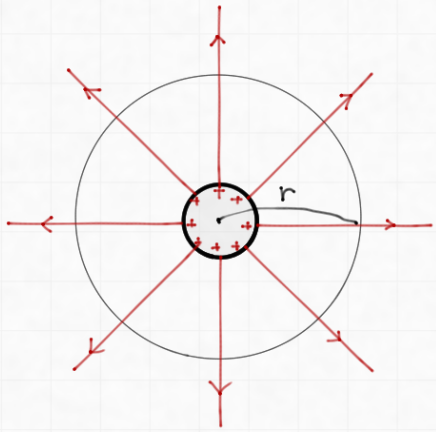
$$T_x = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{R^{k-1}}{A}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^{k+1}}{A}}$$

$$\frac{t_x}{T_x} = \frac{1}{\sqrt{3-k}}$$

問2 $k>3$のとき、合力の増分が正だから点Oに向かう力が働く。
またその力の大きさはΔRに比例するので、ずれはどんどん大きくなり、宇宙線は点Oに引よせられ、いずれ天体Xに吸いこまれる。

2 (1) (イ) $4\pi kQ$ (本)

(2) (ロ) 電荷は球の表面に分布する ③



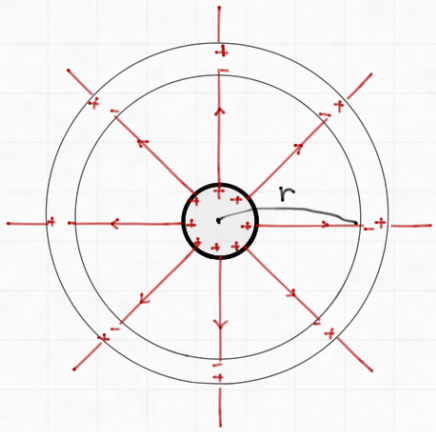
(ハ) $r<a$ のとき　半径 r の球内に電荷は存在しないので $E=0$

(ニ) $r=a$ までは点電荷のときと変わらないので $V_a=k\frac{Q}{a}$

$r<a$ に電場はないので、$r=a$ のときと同じ電位になる

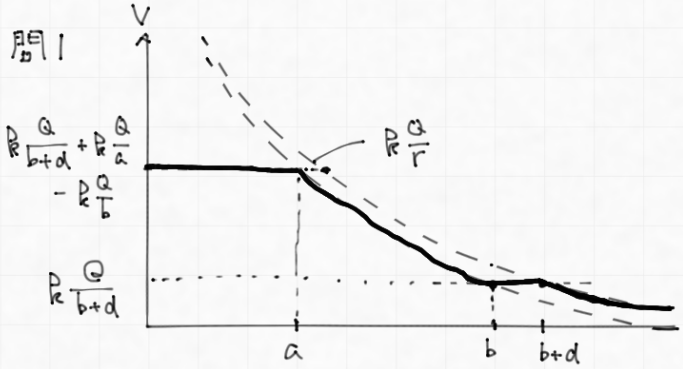
$$V=k\frac{Q}{a}$$

(3) (ホ) $r>b+d$ では点電荷と同じ、中空導体球B内には電場がなく、$a<r<b$ の範囲も点電荷のときと同じ電場



$$V=k\frac{Q}{a}-k\frac{Q}{b}=kQ\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

問1



(4) (ヘ) Bの外側の電荷が流れるので $+Q$ (C)

(ト) Bの電位が0となるので(ホ)の電位差がそのまま残る $V_a=kQ\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

(チ) $kQ\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\times C=Q$ より　$C=\frac{ab}{k(b-a)}$

(5) (リ) 蓄えられる電荷をQとする。半球なので容量が $\frac{1}{2}$ となっていることに注意して

$$Q=\frac{1}{2}\times\frac{ab}{k(b-a)}V_0$$

電場の強さは単位面積あたりの電気力線の本数

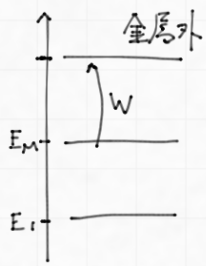
$k\frac{Q}{r^2}$ に $Q=\frac{1}{2}\frac{ab}{k(b-a)}V_0$ を代入してもよい

$$E=4\pi kQ\times\frac{1}{4\pi r^2\times\frac{1}{2}}=\frac{2k}{r^2}\times\frac{ab}{2k(b-a)}V_0=\frac{ab}{r^2(b-a)}V_0$$

(ヌ) 円運動をするので $m\frac{v_0^2}{\frac{a+b}{2}}=\frac{ab}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(b-a)}V_0\times e$

$$K_0=\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{abeV_0}{b^2-a^2}$$

(6) (ル) エネルギー E_M の電子よりもエネルギーの少ない電子を金属外に運び出すので $W+(E_M-E_1)$ のエネルギーが必要となる

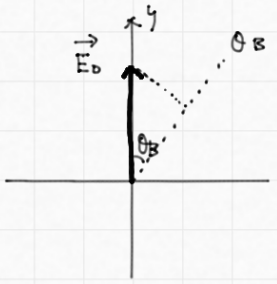


$$K_s=\frac{hc}{\lambda}-W-(E_M-E_1)$$

問2　光電子の最大エネルギーは $\frac{hc}{\lambda}-W$ で、これを超えるものはない…　グラフは ③

K_c はこの値　$K_c=\frac{hc}{\lambda}-W$

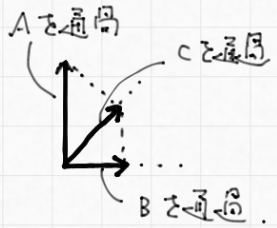
3



(1) (あ) 偏光板Aを通過した光の振幅ベクトルを $\vec{E_0}$ とすると その向きは +y の向きで、このとき光検出器では I_0(A) の電流が流れる。
偏光板Bを通ることで振幅ベクトルは $|\vec{E_0}|\cos\theta_B$ の大きさとなるので、
光検出器で検出される電流は $\cos^2\theta_B \times I_0$

(い) 同じ角度なら減衰は生じない。 $1 \times I_0$

(2)

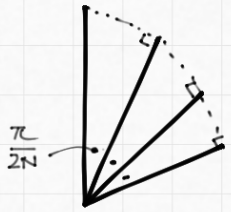


(う) 左図より、$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times I_0 = \frac{1}{4} \times I_0$ となる。

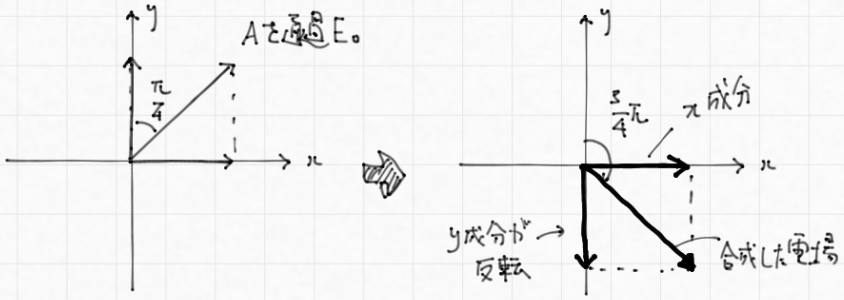
(え) $\left(\cos\frac{\pi}{2N}\right)^{2N} I_0$　　(お) $\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^6 I_0 = \frac{27}{64} I_0$

(か) $\left(\cos\frac{\pi}{2N}\right)^{2N} I_0 = \left(1-\sin^2\frac{\pi}{2N}\right)^N I_0 \fallingdotseq \left(1-\frac{\pi^2}{4N^2}\right)^N I_0$

$= \left(1+\frac{-\frac{\pi^2}{4}}{N^2}\right)^N I_0 \fallingdotseq \left(1-\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{N}\right) I_0$



(3) (き) $n_x d$　(く) $n_y d$　(け) $|n_x - n_y| d$　(こ) $|n_x - n_y| d = \frac{\lambda_1}{2}(2m+1)$



透明物体通過後

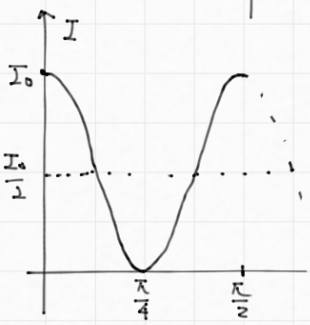
(さ) $|n_x - n_y| d_0 = \frac{\lambda_1}{2}$

$d_0 = \frac{\lambda_1}{2|n_x - n_y|}$

問1　Aを通過したとき $E_x = E_0 \sin\theta$, $E_y = E_0 \cos\theta$.
透明物体を通過　$E_x = E_0 \sin\theta$, $E_y = -E_0 \cos\theta$
Bを通過

$E_x \sin\theta + E_y \cos\theta = E_0 \sin^2\theta - E_0 \cos^2\theta = -E_0 \cos 2\theta$

$I = (-\cos 2\theta)^2 I_0 = \cos^2 2\theta I_0$



(4) 厚みが20倍となったため 光路差による位相差が20倍となり、
電場のx, y成分が同位相となる。したがって Aを通過後の
振幅ベクトルがそのままBに到達する。(大きさ、向きはいずれも変化せず)
したがってBを通過した振幅ベクトルは大きさ E_0 で、信号強度は $1 \times I_0$

問2　$d_0 = \frac{\lambda_1}{2|n_x - n_y|}$ より $\lambda_1 = 2d_0|n_x - n_y|$

$20 d_0 |n_x - n_y| = 10\lambda_1 = \frac{21}{2}\lambda_2$ または $\frac{19}{2}\lambda_2$

$\lambda_2 = \frac{40}{21} d_0 |n_x - n_y|$ または $\frac{40}{19} d_0 |n_x - n_y|$

$\Delta\lambda = |\lambda_1 - \lambda_2|$ だから

$\lambda_2 = \frac{40}{21} d_0 |n_x - n_y|$ のとき $\Delta\lambda$ は最小

$\therefore \Delta\lambda = \frac{2}{21} d_0 |n_x - n_y| = \frac{\lambda_1}{21}$