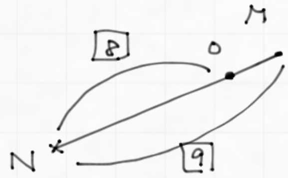
帝京大学2023 理工

1 (1) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{7}{8}\right)$



外分点をNとして　$\overrightarrow{ON} = -8\overrightarrow{OM} = \left(\frac{32}{3}, 7\right)$

(2) $N = 4k+3 = 7l+5$

$4k-7l=2$ の解の1つは $k=4,\ l=2$

$4k-7l=2$ と $4\cdot4-7\times2=2$ を辺々引いて $4(k-4)-7(l-2)=0$

$\Leftrightarrow 4(k-4)=7(l-2)$

左辺は7の倍数だから $k-4=7n$ と表せ。これより $l-2=4n$

$(k, l) = (7n+4, 4n+2)$

よって $N = 4\times(7n+4)+3 = 28n+19$

Nは2桁の自然数だから $n=0, 1, 2$ の **3** つ　最も大きくなるのは $n=2$ のときで $N=$ **75**

(3) (i) $a_1+a_3+a_5 = a_1 + a_1+2d + a_1+4d = 3a_1+6d = 60 \Leftrightarrow a_1+2d=20$

(ii) $a_{20} = a_1+19d > 150$, $a_{19} = a_1+18d \leqq 150$

$a_1 = 20-2d$ を(ii)の不等式に代入

$17d > 130 \quad 16d \leqq 130 \Leftrightarrow \frac{130}{17} < d \leqq \frac{130}{16}$　$\therefore d = \mathbf{8}$, $a_1 = 20-2\times8 = \mathbf{4}$

(4) $\overrightarrow{AB} = (3\sqrt{7}, 7)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{63+49} = 4\sqrt{7}$　$\therefore \vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$

2

(1)

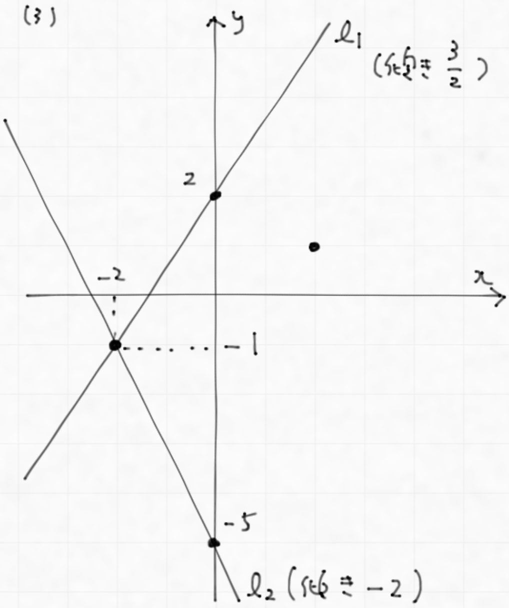
$$\begin{array}{lrl} & 3x-2y & = -4 \\ +) & 2x+y & = -5 \quad \times 2 \\ \hline & 7x & = -14 \end{array}$$

$x=-2,\ y=-1$ **$(-2,-1)$**

(2) $k(y-1)+x-2=0$

これが k の値にかかわらず成り立つのは $y-1=0$ かつ $x-2=0$ **(2.1)**

(3)



三角形を作らないのは

① l_3 が $(-2,-1)$ を通るとき

② $l_3 // l_1$ ③ $l_3 // l_2$

の 3つの場合が考えられる

① $-2-k=k+2$ $k=-2$

② $-\frac{1}{k}=\frac{3}{2}$ $k=-\frac{2}{3}$

③ $-\frac{1}{k}=-2$ $k=\frac{1}{2}$

全部で **3**個あり 最大のものは **$\frac{1}{2}$** 最小のものは **-2**

3

A ● × 2, ○ × 18　　B ● × 5, ○ × 45

(1) ○○　$\frac{{}_{18}C_2}{{}_{20}C_2} = \frac{\overset{9}{\cancel{18}} \times 17}{\underset{10}{\cancel{20}} \times 19} = \frac{153}{190}$

●○　$\frac{{}_{18}C_1 \times {}_{2}C_1}{{}_{20}C_2} = \frac{\cancel{2} \cdot 18 \cdot \cancel{2}}{\underset{5}{\cancel{20}} \cdot 19} = \frac{18}{95}$

●●　$\frac{{}_{2}C_2}{{}_{20}C_2} = \frac{2}{20 \cdot 19} = \frac{1}{190}$

(2) ●●　$\frac{{}_{5}C_2}{{}_{50}C_2} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{4}^{2}}{\underset{\cancel{10}\,5}{\cancel{50}} \cdot 49} = \frac{2}{245}$

(3)　$\frac{2}{20} \times \frac{5}{50} = \frac{1}{100}$

4 $y = x^3 - x^2 - x \quad = f(x)$ と表す

(1) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \qquad f'(-1) = 3 + 2 - 1 = 4$

P$(-1,-1)$における接線は $y = 4(x+1) - 1 \qquad \therefore\ y = \mathbf{4x+3}$

これとy軸との交点は $x = 0$を代入して $y = 3 \qquad \therefore\ \mathbf{(0, 3)}$

(2) mとCの接点を$(t, f(t))$とする.

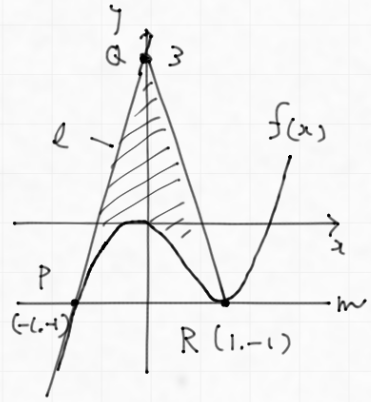
mは $y = f'(t)(x-t) + f(t)$ だから $y = (3t^2 - 2t - 1)x - 2t^3 + t^2$

これがP$(-1,-1)$を通るとき $-1 = -3t^2 + 2t + 1 - 2t^3 + t^2$

$\Leftrightarrow \quad t^3 + t^2 - t - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+1)^2(t-1) = 0$

$t \neq -1$だから $t = 1$. このときmは $y = \mathbf{-1}$

Rは $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 \qquad \therefore$ R$\mathbf{(1, -1)}$



(3) 直線RQは $y = -4x + 3$

面積Sは

$$S = \int_{-1}^{0} (4x + 3 - f(x))\,dx + \int_{0}^{1} (-4x + 3 - f(x))\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^3 + x^2 + 5x + 3)\,dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + x^2 - 3x + 3)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-x^3)\,dx + \int_{-1}^{1} (x^2 + 3)\,dx + \int_{-1}^{0} 5x\,dx + \int_{0}^{1} (-3x)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}x^3 + 3x\right]_0^1 + \frac{5}{2}\left[x^2\right]_{-1}^{0} - \frac{3}{2}\left[x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} + 6 - \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \mathbf{\frac{8}{3}}$$