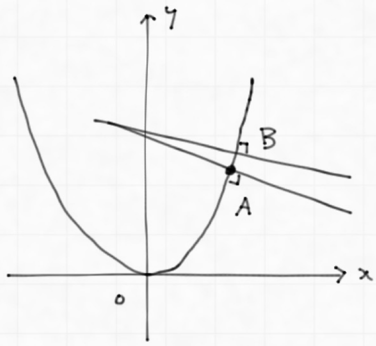
大阪医科薬科　前期2023



1

(1) $y'=2x$ だから $a\neq 0$のとき、法線の傾きは $-\frac{1}{2a}$

法線は　$y=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2 = -\frac{1}{2a}x+\frac{1}{2}+a^2$

$\Leftrightarrow \quad x+2ay-2a^3-a=0$

$a=0$のときの法線は $x=0$ であるが上式で $a=0$ とすると

$x=0$となり、上式は $a=0$ のときも含まれる.

よって 点Aにおける法線は　$\boldsymbol{x+2ay-2a^3-a=0}$

(2) 点Bにおける法線は　$x+2by-2b^3-b=0$

2つの法線の式を連立して y座標をもとめる.

連立すると　$2(a-b)y-2a^3-a+2b^3+b=0$

$$2(a-b)y-2(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a-b)=0$$

ここで $a\neq b$ だから $a-b$で両辺を割って

$$y=a^2+ab+b^2+\frac{1}{2}$$

$b\to a$ とすると　$\displaystyle\lim_{b\to a} y = 3a^2+\frac{1}{2}$

このy座標をAの法線の式に代入　$x=-6a^3-a+2a^3+a=-4a^3$

$$\therefore \ \mathrm{Q}\left(\boldsymbol{-4a^3,\ 3a^2+\frac{1}{2}}\right)$$

(3) Q(X, Y)とする　$\left(X=-4a^3,\ Y=3a^2+\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{dX}{da}=-12a^2, \quad \frac{dY}{da}=6a$$

曲線の長さを l として

$$l=\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{dX}{da}\right)^2+\left(\frac{dY}{da}\right)^2}\,da=\int_{-1}^{1}\sqrt{12^2a^4+6^2a^2}\,da = 2\int_{0}^{1}6a\sqrt{4a^2+1}\,da$$

$4a^2+1=t$ とおくと　$\frac{dt}{da}=8a$,

a	$0\to 1$
t	$1\to 5$

$$l=\overset{3}{\cancel{12}}\int_{1}^{5}\cancel{a}\,t^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{\underset{2}{\cancel{8a}}}\,dt=\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\left[\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^5=\boldsymbol{5\sqrt{5}-1}$$

2

(1) $f(x) = e^x \sin(e^x) = 0$ となるのは $e^x = n\pi$ とすると $x = \log(n\pi)$ となるので

$$a_n = \log(n\pi) \qquad (e^{a_n} = n\pi \text{ となる})$$

$$S_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} |f(x)|\,dx = \left| \int_{a_n}^{a_{n+1}} e^x \sin(e^x)\,dx \right|$$

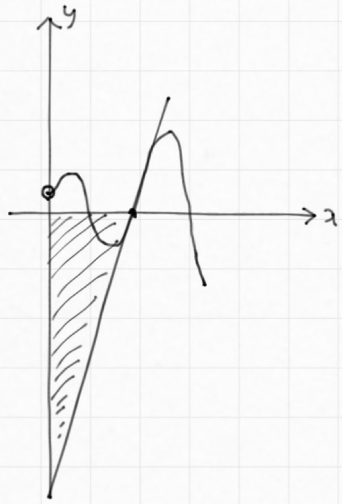
$e^x = X$ とおく $\quad \dfrac{dX}{dx} = e^x$

x	$a_n \to a_{n+1}$
X	$n\pi \to (n+1)\pi$

$$S_n = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cancel{e^x} \sin X \frac{1}{\cancel{e^x}} dX \right| = \left| \Big[-\cos X \Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \right| = \left| -(-1)^{n+1} + (-1)^n \right| = \left| 2 \cdot (-1)^n \right| = 2$$

(2) $f'(x) = e^x \sin(e^x) + e^x \cos(e^x) \times e^x$

$$f'(a_n) = n\pi \sin(n\pi) + (n\pi)^2 \cos(n\pi)$$
$$= n^2\pi^2(-1)^n$$



接線は $y = n^2\pi^2(-1)^n(x - a_n) + f(a_n)$

$$= n^2\pi^2(-1)^n(x - a_n)$$

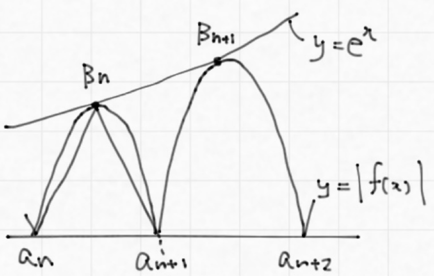
$x = 0$ のとき $y = n^2\pi^2(-1)^{n+1}a_n \qquad y = 0$ のとき $x = a_n$

T_nは三角形で $T_n = \dfrac{1}{2}\left| n^2\pi^2(-1)^{n+1}a_n \right| \left| a_n \right| = \dfrac{1}{2}n^2\pi^2 a_n^2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \log(n+1)\pi}{n^2 \log(n\pi)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^2 (\log n\pi + \log\frac{n+1}{n})}{\log n\pi}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ (1+\tfrac{1}{n})^2 \left(1 + \frac{\log\frac{n+1}{n}}{\log n\pi}\right) \right\} = 1$$

(3)



$f(x) = \pm 1$ となるときだから.

$\sin(e^x) = \pm 1$ より $\quad e^x = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$$x = \log\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$a_n < x < a_{n+1}$ を満たすものをb_nとすると $b_n = \log(n\pi + \frac{\pi}{2})$

$$U_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \times |f(b_n)|$$

$$= \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \times e^{b_n} = \frac{1}{2}\left(\log(n+1)\pi - \log n\pi\right)\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \times \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{n}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \times \frac{1}{2} \times \pi = \mathbf{\frac{\pi}{2}}$$

3

(1) $f(x)=0$ は x の n 次方程式だから実数 $a_n, a_{n-1}, \cdots a_1, a_0$ を用いて

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ と表すことができる

α は $f(x)=0$ の解だから

$$f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

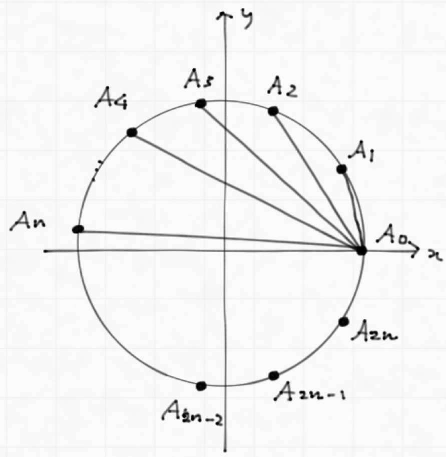
この式の両辺の共役複素数を考える

$$\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0} = \overline{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n\overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = 0$$

これは $f(\overline{\alpha})=0$ を示しており $\overline{\alpha}$ も $f(x)=0$ の解である.



(2) A_k を $z_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n+1}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}k\right)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots 2n)$

と表すと $A_0A_1A_2\cdots A_{2n}$ は半径1の円に内接する正 $2n+1$ 角形となり題意を満たす.

$\alpha = \cos\frac{\pi}{2n+1} + i\sin\frac{\pi}{2n+1}$ と表すと $z_k = \alpha^k$ と表せる

$$L = A_0A_1 \times A_0A_2 \times A_0A_3 \times \cdots \times A_0A_n$$
$$= |\alpha-1||\alpha^2-1||\alpha^3-1|\cdots\times|\alpha^n-1| \quad \cdots ①$$

また. $z_k^{2n+1} = \alpha^{k^{2n+1}} = \alpha^{2n+1^k} = 1^k = 1$ だから z_k は $z^{2n+1}=1$ の解であり. $2n+1$ 次方程式の解は最大 $2n+1$ 個. $\alpha^0, \alpha^1, \cdots\cdots \alpha^{2n}$ は全て異なる値であることから

$$z^{2n+1}-1 = (z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots(z-\alpha^n)(z-\alpha^{n+1})(z-\alpha^{n+2})\cdots\cdots(z-\alpha^{2n}) \quad \cdots ②$$

$|\alpha|=1$ より $\alpha\overline{\alpha} = 1^2 = 1$ および $\alpha^{2n+1}=1$ より.

$$\alpha^{n+1} = \frac{1}{\alpha^n} = \overline{\alpha}^n, \quad \alpha^{n+2} = \frac{1}{\alpha^{n-1}} = \overline{\alpha}^{n-1}, \quad \cdots \quad \alpha^{2n} = \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$$

よって ③ 式は

$$z^{2n+1}-1 = (z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots(z-\alpha^n)(z-\overline{\alpha}^n)(z-\overline{\alpha}^{n-1})\cdots(z-\overline{\alpha})$$

と変形できる

$$z^{2n+1}-1 = (z-1)(z^{2n}+z^{2n-1}+\cdots+z+1)$$

だから

$$z^{2n}+z^{2n-1}+\cdots+z+1 = (z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots(z-\alpha^n)(z-\overline{\alpha}^n)(z-\overline{\alpha}^{n-1})\cdots(z-\overline{\alpha})$$

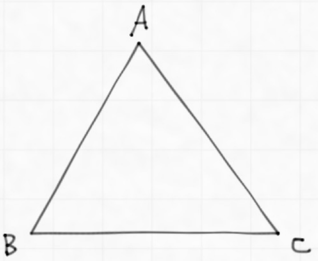
この式の z に1を代入

$$1+1+\cdots+1+1 = (1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^n)(1-\overline{\alpha}^n)(1-\overline{\alpha}^{n-1})\cdots(z-\overline{\alpha})$$

$$2n+1 = |1-\alpha|^2|1-\alpha^2|^2\cdots|1-\alpha^{n-1}|^2|1-\alpha^n|^2 = L^2$$

$$\therefore \quad L = \sqrt{2n+1}$$

4



(1) どの頂点からも、次の移動で3つの頂点のどこにも移動できる

2回の移動での頂点の移動パターンは

AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC の9通り.

×が連続しないのは AA, AB, AC, BA, CA の5通り.

$$p_2 = \frac{5}{9}$$

3回のとき ○○○, ○○×, ○×○, ×○○, ×○×

○はA, ×はBとCに対応するので

$$p_3 = \frac{1^3 + 1^2\times 2\times 3 + 1\times 2^2}{3^3} = \frac{11}{27}$$

4回のとき ○○○○, ○○○×, ○○×○, ○×○○, ×○○○

○×○×, ×○○×, ×○×○

$$p_4 = \frac{1^4 + 1^3\times 2\times 4 + 1^2\times 2^2\times 3}{3^4} = \frac{21}{81} = \frac{7}{27}$$

(2) $n+2$ 回目について

1回目Aから始まったとき、2〜$n+2$回目まで×が連続しないのは p_{n+1} … $\frac{1}{3}\times p_{n+1}$

1回目BまたはCから始まったとき 2回目には必ずAに移動し、3〜$n+2$回目までは×が連続しないのは p_n … $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times p_n$

$$p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n \quad (n\geq 1)$$

$p_1 = \frac{1}{3} \quad p_2 = \frac{5}{9}$

上の漸化式は $p_{n+2} - \frac{2}{3}p_{n+1} = -\frac{1}{3}\left(p_{n+1} - \frac{2}{3}p_n\right)$ または $p_{n+2} + \frac{1}{3}p_{n+1} = \frac{2}{3}\left(p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n\right)$

と変形できる. 前者より $p_{n+1} - \frac{2}{3}p_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(p_2 - \frac{2}{3}\cdot p_1\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{9}\right)$ …①

後者から $p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(p_2 + \frac{1}{3}p_1\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\times\frac{4}{3}$ …②

②−① $p_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

5

(1) 1〜8の中で3の倍数は3と6の2つだから 8!を素因数分解すると $8! = 2^{\square}\times 3^{2}\times 5^{\square}\times 7^{\triangle}$

という形になりこれは、8!は9で割り切れるが、9^2で割り切れないことを示している

よって $f(8) = \mathbf{1}$

6789!を素因数分解したとき、3がいくつあるのかを考える.

$3^8 = 6561 < 3^9 = 19683$

$6789! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdots18\cdots27\cdots81\cdots243\cdots \quad 6561\cdots6789$

$\dfrac{6789}{3^8} = 1\cdots228 \qquad \dfrac{6789}{3^7} = 3\cdots228 \qquad \dfrac{6789}{3^6} = 9\cdots228 \qquad \dfrac{6789}{3^5} = 27\cdots25$

$\dfrac{6789}{3^4} = 83\cdots25 \qquad \dfrac{6789}{3^3} = 251\cdots25 \qquad \dfrac{6789}{3^2} = 754\cdots7 \qquad \dfrac{6789}{3^1} = 2263$

$1+3+9+27+83+251+754+2263 = 3391$

$3^{3391} = 9^{1695}\times 3$ だから $f(6789) = \mathbf{1695}$

(2) $[n]$を nを超えない最大の整数とすると (1)での考察より、

$3^m \leqq n$ を満たす最大の整数 mを用いて

$$f(n) = \left[\left(\left[\frac{n}{3^1}\right]+\left[\frac{n}{3^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{3^m}\right]\right)\times\frac{1}{2}\right]$$

$$\leqq \frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{3^1}\right]+\left[\frac{n}{3^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{3^m}\right]\right)$$

$$\leqq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{3^1}+\frac{n}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^m}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{3}\times\frac{1-\frac{1}{3^m}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{n}{4}\left(1-\frac{1}{3^m}\right)$$

$4k \leqq n\left(1-\frac{1}{3^m}\right) < n$ $\quad\therefore\ 4k < n$ が示された

(3) (2)より $4\times1000 < n$ だから.

$$f(4000) = \left[\frac{1}{2}\left(\left[\frac{4000}{3^1}\right]+\left[\frac{4000}{3^2}\right]+\cdots+\left[\frac{4000}{3^7}\right]\right)\right] = \left[\frac{1}{2}(1333+444+148+49+16+5+1)\right]$$

$$= \left[\frac{1996}{2}\right] = 998$$

$4001\div3 = 1333\cdots2$ $\qquad f(4001) = 998$

$4002\div3 = 1334\cdots0$, $4002\div9 = 444\cdots6$ $\qquad f(4002) = \left[\frac{1997}{2}\right] = 998$

$4003\div3 = 1334\cdots1$ $\qquad f(4003) = 998$

$4004\div3 = 1334\cdots2$ $\qquad f(4004) = 998$

$4005\div3 = 1535\cdots1$ $\quad 4005\div9 = 445\cdots0$ $\qquad f(4005) = \left[\frac{2000}{2}\right] = 1000$

$4005\div27 = 148\cdots9$

よって $f(n) = 1000$ となる最小の n は $n = \mathbf{4005}$