駒澤大学2020

1

(1) $5! = 120$通り.

1の位が4なら $4! = 24$ 通り.

偶数は下1桁が2または4. $2 \times 4! = 48$通り

(2) $N = 13k + 4 = 6l + 1$

$13k - 6l + 3 = 0$ $k = 3,\ l = 7$ はこれを満たす

$$
\begin{array}{rl}
 & 13k - 6l + 3 = 0 \\
-) & 13 \cdot 3 - 6 \cdot 7 + 3 = 0 \\
\hline
 & 13(k-3) - 6(l-7) = 0
\end{array}
$$

$k - 3 = 6n,\ l - 7 = 13n$

$N = 13(6n + 3) + 4 = 78n + 43$

最小は $n = 0$ のときで $N = 43$

3桁で最大は $n = 12$ のとき $N = 979$

(3) (i) $-2 \leqq x \leqq 0$ だから $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$ $1 \leqq s \leqq 4$

(ii) $y = s^3 - 4s$ $y' = 3s^2 - 4 = 0$ となるのは $s = \frac{2}{\sqrt{3}}$

s	1	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

$s = \frac{2}{\sqrt{3}}$ で最小 $y = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{8}{\sqrt{3}} = -\frac{16}{3\sqrt{3}} = -\frac{16\sqrt{3}}{9}$

(4) $|\vec{a} + 3\vec{b}|^2 = 9 + 9 + 6\vec{a}\cdot\vec{b} = 16$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{3}$

$|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = 9 + t^2 - \frac{2}{3}t = \left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{80}{9}$ $t = \frac{1}{3}$ のとき 最小値 $\frac{\sqrt{80}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$

2

(1) 赤2つ $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ 赤1つ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2=\frac{1}{2}$ 赤0こ $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

(2) 青0こ $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ したがって少なくとも1つの青玉が入っているのは $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

(3) 赤2こ青3ことなるのは $\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{32}$ このときのみ白玉がない $1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

(4) 赤・青と併せて 0こ、1こ、2このいずれか.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)\times{}_5C_1+\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_5C_2=\frac{1+5+10}{2^5}=\frac{1}{2}$$

(5) 1色しかないのは全て白のときのみ $1-\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{31}{32}$

(6) 2色になるのは 赤・青 $\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{32}$

赤白 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{32}$

青白 $\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)=\frac{7}{32}$

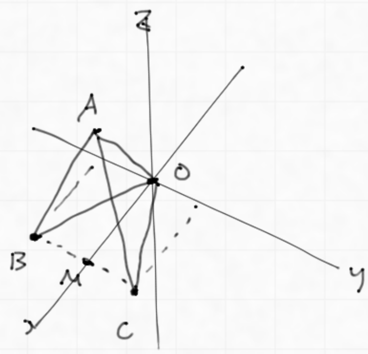
$\frac{1}{32}+\frac{3}{32}+\frac{7}{32}=\frac{11}{32}$

よって3色となるのは $1-\frac{11}{32}-\frac{1}{32}=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$

(7) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\frac{7}{32}+\frac{16}{32}}{\frac{3}{4}}=\frac{23}{24}$$

3



(1) $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{3+1} = 2$

$\angle AOC = \frac{\pi}{3}$ $\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \sqrt{3}\,s = 2\cdot 2\cos\frac{\pi}{3} = 2$

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{s^2+t^2} = 2 \quad s^2+t^2 = 4$

$s = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad t = \sqrt{4-s^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(2) $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ Hは△OBCの重心 $H\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, 0\right)$

$M = (\sqrt{3}, 0, 0)$ HはOMを2:1に内分した点.

Nは△ABCの重心だから NはAMを2:1に内分

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{3}(\sqrt{3}, 0, 0)$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{6}}{9}\right) = \left(\frac{8}{3\sqrt{3}}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)$$

(3) Pは四面体の重心 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$$\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{6}$$