大阪大学2023

1

(1) $(-1)^n\left\{\dfrac{1}{x+1}-1-\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}=(-1)^n\left\{\dfrac{1}{x+1}-1-(-x)\dfrac{1-(-x)^{n-1}}{1-(-x)}\right\}$

$$=(-1)^n\times\frac{\cancel{1}\cancel{-x}\cancel{-1}\cancel{+x}+(-x)^n}{1+x}=\frac{x^n}{1+x}$$

したがって

$$中辺-左辺=\frac{x^n}{1+x}-\frac{1}{2}x^n=\frac{x^n-\frac{1}{2}x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}}{1+x}=\frac{x^n(1-x)}{2(1+x)}\geqq 0\quad(\because 0\leqq x\leqq 1)$$

$$右辺-中辺=x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}-\frac{x^n}{1+x}=\frac{\cancel{x^n}+x^{n+1}-\frac{1}{2}x^{n+1}-\frac{1}{2}x^{n+2}-\cancel{x^n}}{1+x}=\frac{x^{n+1}(1-x)}{2(1+x)}\geqq 0\quad(\because 0\leqq x\leqq 1)$$

以上より $0\leqq x\leqq 1$ のとき

$\dfrac{1}{2}x^n\leqq(-1)^n\left\{\dfrac{1}{x+1}-1-\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}\leqq x^n-\dfrac{1}{2}x^{n+1}$ が成り立つことが示された.

(2) (1)の不等式を $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で積分する

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^n\,dx\leqq(-1)^n\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right)dx\leqq\int_0^1\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}\right)dx$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}\leqq(-1)^n\Big[\log|x+1|-x\Big]_0^1-(-1)^n\sum_{k=2}^{n}\int_0^1(-x)^{k-1}dx\leqq\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}$$

$$\frac{1}{2(n+1)}\leqq(-1)^n\left(\log 2-1\right)-(-1)^n\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{(-x)^k}{k}\times(-1)\right]_0^1\leqq\frac{n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{2(n+1)}\leqq(-1)^n\left(\log 2-1\right)-(-1)^n\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\leqq\frac{n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{2(n+1)}\leqq(-1)^n\left(\log 2-1\right)-(-1)^n\left(a_n-1\right)\leqq\frac{n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\leqq-(-1)^n n\left(a_n-\log 2\right)\leqq\frac{1+\frac{3}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

$$-\frac{1+\frac{3}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}\leqq(-1)^n n\left(a_n-\log 2\right)\leqq-\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1+\frac{3}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right\}=-\frac{1}{2}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right\}=-\frac{1}{2}$

だから, はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^n n\left(a_n-\log 2\right)\right\}=-\frac{1}{2}$$

2 (1) $2\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{x}$, $\vec{OA}+2\vec{OB}=\vec{y}$ と表すと

条件は $|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$ となる.

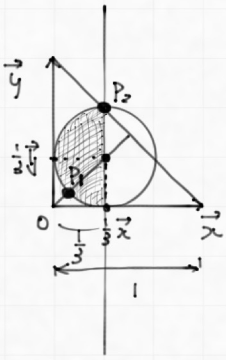
また. $(\vec{x}+\vec{y})\times\frac{1}{3}=\vec{OA}+\vec{OB}$ だから.

$$(2\vec{OA}+\vec{OB})\cdot(\vec{OA}+\vec{OB})=\vec{x}\cdot\left(\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})\right)=\frac{1}{3} \iff |\vec{x}|^2+\vec{x}\cdot\vec{y}=1 \iff \vec{x}\cdot\vec{y}=0$$

よって $(2\vec{OA}+\vec{OB})\cdot(\vec{OA}+2\vec{OB})=\vec{x}\cdot\vec{y}=\mathbf{0}$

(2) Pの条件は

$\left|\vec{OP}-\frac{\vec{x}+\vec{y}}{3}\right|\leqq\frac{1}{3}$ かつ $\vec{OP}\cdot\vec{x}\leqq\frac{1}{3}$



$|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$, $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ だから $\vec{x}$ と $\vec{y}$ は左図のような直角二等辺三角形を作る.

$\frac{\vec{x}+\vec{y}}{3}$ は直角二等辺三角形の重心で. $\left|\vec{OP}-\frac{\vec{x}+\vec{y}}{3}\right|\leqq\frac{1}{3}$ は重心を中心とした半径 $\frac{1}{3}$ の円の内部を表す.

$\vec{OP}$ と $\vec{x}$ のなす角を θ とすると

$\vec{OP}\cdot\vec{x}=|\vec{OP}||\vec{x}|\cos\theta=|\vec{OP}|\cos\theta\leqq\frac{1}{3}$

これはPが. $\vec{x}$ と垂直で $\frac{1}{3}\vec{x}$ の点を通る直線のOを含む側であることを表している.

以上を併せるとPは左図斜線部(境界含む)の範囲に存在し、Pが図中の P_1 のとき $|\vec{OP}|$ が最小. P_2 のとき最大となる.

$|\vec{OP_2}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ $|\vec{OP_1}|=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

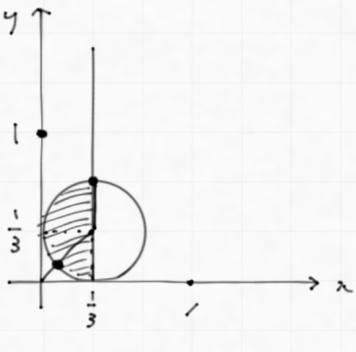
最大値は $\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$, 最小値は $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}$

(2) 別解

$|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$, $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ だから $\vec{x}=(1, 0)$. $\vec{y}=(0, 1)$ と設定できる.

$\vec{OP}=(x, y)$ として. $|\vec{OP}-(\vec{OA}+\vec{OB})|=\left|\vec{OP}-\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})\right|=\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}\leqq\frac{1}{3}$ …①

$\vec{OP}\cdot(2\vec{OA}+\vec{OB})=\vec{OP}\cdot\vec{x}=x\leqq\frac{1}{3}$ …②



①②を満たすのは左図斜線部

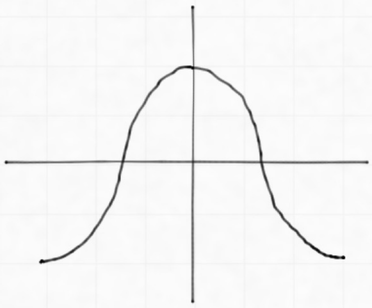
以下同様

3 $y' = -\sin t$

$(t, \cos t)$ における接線は $y = -\sin t\,(x-t) + \cos t$

接線が (a, b) を通るとき

$$b = -a\sin t + t\sin t + \cos t \quad \cdots ①$$



$y=\cos x$ のグラフの概形から 2つ以上の接点をもつ接線は

$y=-1$ に限られる（このとき t は $t=-\pi, \pi$）ので $N(P) = 4$ となるのは

$-\pi < t \leqq \pi$ の範囲で①が異なる4つの解を持つときである.

①の右辺を $f(t)$ とすると

$$f'(t) = -a\cos t + t\cos t = (t-a)\cos t$$

$f'(t)=0$ となるのは $t = \pm\frac{\pi}{2}, a$

(i) $0<a<\frac{\pi}{2}$ のとき

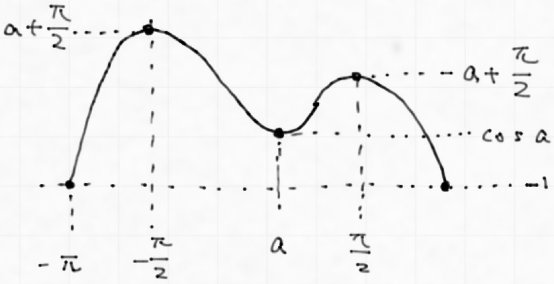
t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘		↗		↘	

$f(t)$ の増減は右のようになる

$f(-\pi)=-1,\ f(\pi)=-1,\ f(a)=\cos a$

$f(-\frac{\pi}{2}) = a+\frac{\pi}{2},\quad f(\frac{\pi}{2}) = -a+\frac{\pi}{2}$

だから $y=f(t)$ のグラフは右のようになる



$a+\frac{\pi}{2} > -a+\frac{\pi}{2}, \quad \cos a > 0 > -1$

なので. $y=f(t)$ と $y=b$ のグラフが異なる

4点で交わるための条件は

$$\cos a < b < -a+\frac{\pi}{2} \quad \left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)$$

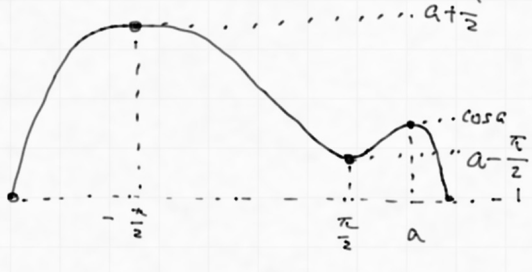
(ii) $\frac{\pi}{2} \leqq a < \pi$ のとき

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘		↗		↘	

$f(t)$ の増減は右のようになる.

$f(-\frac{\pi}{2}) = a+\frac{\pi}{2} > 0 > f(a) = \cos a$

$f(\frac{\pi}{2}) = -a+\frac{\pi}{2} > -1 \Leftrightarrow a < \frac{\pi}{2}+1$ だから



① $a<\frac{\pi}{2}+1$ のとき、$y=f(t)$ と $y=b$ のグラフが

異なる4点で交わるのは

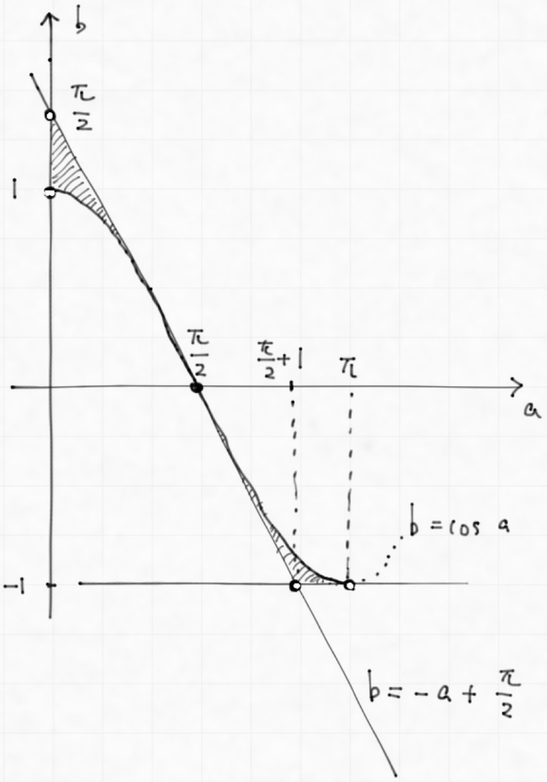
$$-a+\frac{\pi}{2} < b < \cos a$$

② $\frac{\pi}{2}+1 \leqq a < \pi$ のとき $y=f(t)$ と $y=b$ のグラフが異なる4点で交わるのは

$$-1 < b < \cos a$$

以上 (i) (ii)① ② をまとめると. $N(P)=4$ かつ $0<a<\pi$ をみたすような

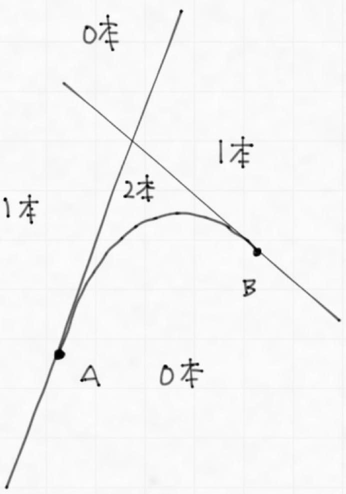
点Pの存在範囲は下のようになる



左図斜線部 境界は除く.

補足

接線の存在条件

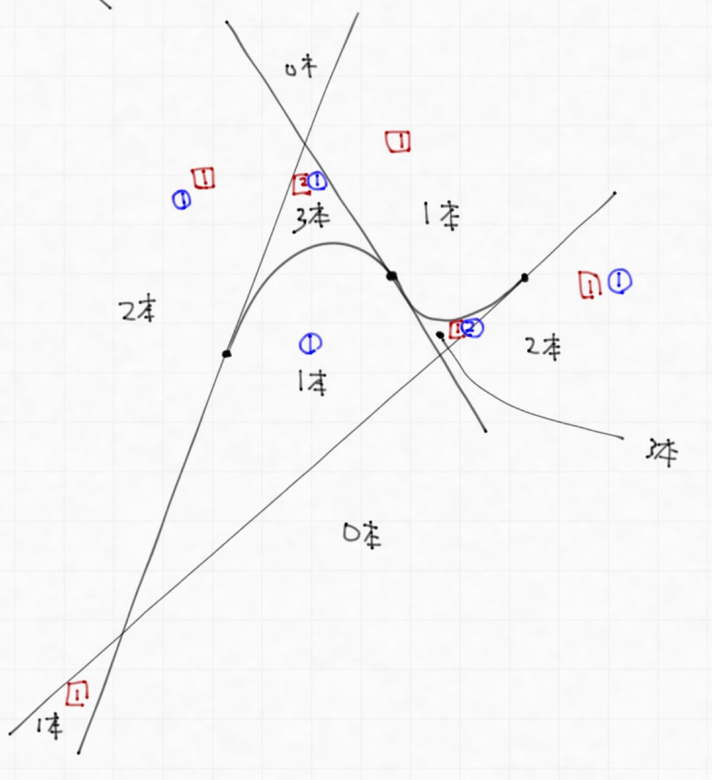


上に凸な曲線ABに対して何本の接線が引けるのかは

左のようになる

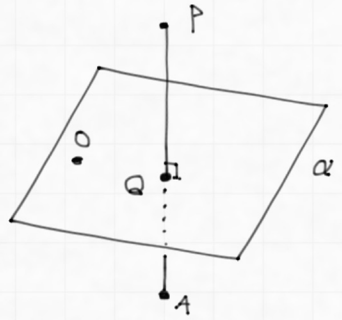
凹凸が切り替わる曲線でも同様 (右下図)

これを参考に. 領域をあらかじめ調べておくことで 解答まで. たどりつき易くなる.



4

(1) Qはα上にあるので $\vec{OQ}\cdot\vec{AP}=0$



Aを始点とすると $(\vec{AQ}-\vec{AO})\cdot\vec{AP}=0$

$$\vec{AQ}\cdot\vec{AP}=\vec{AO}\cdot\vec{AP}$$

右辺 $=(\vec{AP}\cdot\vec{AO})^2=(\vec{AQ}\cdot\vec{AP})^2$

ここで QはAPを内分する点なので

$$(\vec{AQ}\cdot\vec{AP})^2=(|\vec{AQ}||\vec{AP}|)^2=|\vec{AP}|^2|\vec{AQ}|^2=\text{右辺}.$$

証明終

(2) $|\vec{OQ}|^2=|\vec{AQ}-\vec{AO}|^2=|\vec{AQ}|^2-2\vec{AQ}\cdot\vec{AO}+|\vec{AO}|^2=|\vec{AQ}|^2-2|\vec{AQ}|^2+|\vec{AO}|^2=|\vec{AO}|^2-|\vec{AQ}|^2=1^2$

$\vec{AO}=(-a,0,-b)$. だから $|\vec{AQ}|^2=a^2+b^2-1$ …①

$(\vec{AP}\cdot\vec{AO})^2=\left((x-a,y,-b)\cdot(-a,0,-b)\right)^2=\left(-a(x-a)+b^2\right)^2=(a^2+b^2-ax)^2$ …②

$|\vec{AP}|^2=(x-a)^2+y^2+b^2$ …③

①,②,③と(1)の式に代入

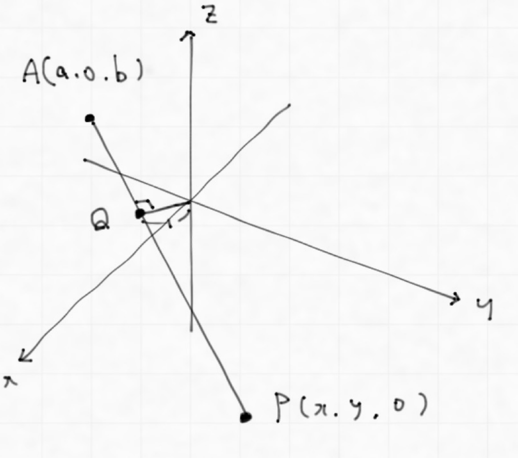
$$(a^2+b^2-ax)^2=\left((x-a)^2+y^2+b^2\right)(a^2+b^2-1)$$

$$\cancel{(a^2+b^2)^2}-2ax(a^2+b^2)+a^2x^2=(x^2-2ax+y^2)(a^2+b^2-1)+\cancel{(a^2+b^2)^2}-a^2-b^2$$

$$-\cancel{2a^3x}-\cancel{2ab^2x}+\cancel{a^2x^2}-\cancel{a^2x^2}-b^2x^2+x^2+\cancel{2a^3x}+\cancel{2ab^2x}-2ax-a^2y^2-b^2y^2+y^2+a^2+b^2=0$$

$$(1-b^2)x^2-2ax+(1-a^2-b^2)y^2+a^2+b^2=0$$

∴ $\boldsymbol{(b^2-1)x^2+2ax+(a^2+b^2-1)y^2-a^2-b^2=0}$



$\vec{AO}$ の $\vec{AP}$ に対する正射影ベクトルが $\vec{AQ}$

$$\begin{cases}\vec{AQ}=\dfrac{\vec{AO}\cdot\vec{AP}}{|\vec{AP}|^2}\vec{AP}\\ |\vec{AQ}|=\sqrt{|\vec{AO}|^2-|\vec{OQ}|^2}=\sqrt{|\vec{AO}|^2-1}\end{cases}$$

$$\frac{(\vec{AO}\cdot\vec{AP})^2\cancel{|\vec{AP}|^2}}{|\vec{AP}|^{\cancel{4}\,2}}=|\vec{AO}|^2-1$$

$$(-ax+a^2+b^2)^2=(a^2+b^2-1)\left((x-a)^2+y^2+b^2\right)$$

以下同じ.

5

(1) $n=1$のとき.

$$b_1=\sum_{k=1}^{1}a_1^{1-k}a_k=a_1^0\cdot a_1=a_1$$

a_1はさいころの目なので7の倍数ではない. $p_1=0$

$n=2$のとき.

$$b_2=\sum_{k=1}^{2}a_1^{2-k}a_k=a_1^1\times a_1+a_1^0\times a_2=a_1^2+a_2$$

$a_1 \backslash a_2$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	5	6	7	8	9	10
3	10	11	12	13	14	15
4	17	18	19	20	21	22
5	26	27	28	29	30	31
6	37	38	39	40	41	42

$$p_2=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

(2) $$b_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_1^{n+1-k}a_k=a_1\sum_{k=1}^{n}a_1^{n-k}a_k+a_{n+1}=a_1b_n+a_{n+1}$$

と表されるので. b_nを固定するとb_{n+1}は連続した6個の自然数となる. … (*)

(i) b_nが7の倍数のとき.

$$b_{n+1}=a_1b_n+a_{n+1}\equiv a_{n+1}\not\equiv 0\pmod 7$$

だから b_{n+1}は7の倍数ではない

(ii) b_nが7の倍数でないとき

$$a_1b_n\not\equiv 0\pmod 7$$

で. (*) より. $a_1b_n+a_{n+1}\equiv 0\pmod 7$ となるa_{n+1}が1つだけ存在する

以上 (i) (ii) より

$$p_{n+1}=(1-p_n)\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow\quad p_{n+1}-\frac{1}{7}=-\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{1}{7}\right)$$

$\left\{p_n-\frac{1}{7}\right\}$は初項$p_1-\frac{1}{7}=-\frac{1}{7}$, 公比$-\frac{1}{6}$の等比数列となり.

$$p_n-\frac{1}{7}=-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\qquad\therefore\ p_n=-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{7}$$

2　別解　$\vec{OA}$, $\vec{OB}$ を主役とすると…

(1) $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ と表す.

条件より　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1^2$ …①

$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=1^2$ …②

①−②　$3|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2=0$

$(|\vec{a}|-|\vec{b}|)(|\vec{a}|^2+|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2)=0$

ここで $|\vec{a}|^2+|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2=\left(|\vec{a}|+\frac{1}{2}|\vec{b}|\right)^2+\frac{3}{4}|\vec{b}|^2=0$ となるのは $|\vec{a}|=|\vec{b}|=0$ のときに限られるので O, A, B が同じ点となってしまうので題意に反する

したがって $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ であり, このとき, ①②は

$5|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ …③

とあらわされる

条件より $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=2|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}=3|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{3}$ …④

④より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{9}-|\vec{a}|^2$ を③に代入

$5|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}-4|\vec{a}|^2=1$　　∴ $|\vec{a}|=\frac{\sqrt{5}}{3}=|\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{4}{9}$

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times\frac{5}{9}+2\times\frac{5}{9}+5\times\left(-\frac{4}{9}\right)=0$

∴ $(2\vec{OA}+\vec{OB})\cdot(\vec{OA}+2\vec{OB})=0$

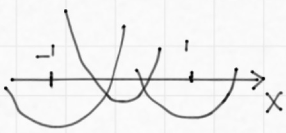
ここまでは良いが, この後が困難

(文系の問題　方針のみ)

6　$1-2\sin^2\theta=a\sin\theta+b \iff 2\sin^2\theta+a\sin\theta+b-1=0$

$\sin\theta=X$ とすると　$2X^2+aX+b-1=0$ …①　$-1\leqq X\leqq 1$ …②

②の範囲で①を満たす解があればよい. $f(X)=2X^2+aX+b-1$ として.



以下、解の配置問題

7 (1) $y=(-\log_2 x)^3+a\dfrac{\log_2 x}{\frac{1}{2}}\times\dfrac{3\log_2 x}{2}=-t^3+3at^2$

(2) $\frac{1}{2}\leqq x\leqq 8$ のとき　$\log_2\frac{1}{2}=-1\leqq\log_2 x=t\leqq\log_2 8=3$

$-1\leqq t\leqq 3$ で $y=-t^3+3at^2$ の最大値を考える…