東海大2022

1 (1) $y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$

$x=-5$で最小値をとるので　$a>0$, $-\frac{b}{2a}=-5$　より　$b=\mathbf{10}\,a$

この値が-100だから　$\frac{b^2}{4a}=100$

ここに$b=10a$を代入　$\frac{\cancel{100}a^{\cancel{2}}}{4\cancel{a}}=\cancel{100}$　　$a=\mathbf{4}$

(2) $S=6$となるのは　$(1,1,4)$, $(1,2,3)$, $(2,2,2)$ の3パターン

$$\frac{3+3!+1}{6^3}=\frac{10}{216}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{108}}$$

$S\leqq 4$となるのは　$(1,1,1)$, $(1,1,2)$ の2パターン

$$\frac{1+3}{6^3}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{54}}$$

(3) $\log_{10}\frac{18}{5}=\log_{10}\frac{36}{10}=\log_{10}36-\log_{10}10=2\log_{10}6-1=2(\log_{10}3+\log_{10}2)-1=\mathbf{2\log_{10}2+2\log_{10}3-1}$

$\log_{10}\left(\frac{18}{5}\right)^{66}=66(2\log_{10}2+2\log_{10}3-1)=66(0.6020+0.9542-1)=36.7092$

$\left(\frac{18}{5}\right)^{66}=10^{36.7092}=10^{36}\times 10^{0.7092}$　… **37桁**

(4) $|\sqrt{3}\vec{a}+\vec{b}|^2=3|\vec{a}|^2+2\sqrt{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9+2\sqrt{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+16=13$　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{-12}{2\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}$

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 4}=-\frac{1}{2}$　　$\theta=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\pi$

$\vec{c}\cdot\vec{b}=(\vec{a}+k\vec{b})\cdot\vec{b}=-2\sqrt{3}+k\times 16=0$　　$k=\frac{2\sqrt{3}}{16}=\frac{\mathbf{\sqrt{3}}}{\mathbf{8}}$

(5) $2x+1<3x+2$ だから　$4x-3$が中央値となるのは

（3つの値は全て異なるとあるので等号は含めない）

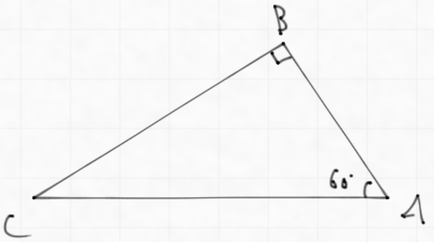
$2x+1<4x-3<3x+2$　$\Leftrightarrow$　$\mathbf{2<x<5}$

平均は $\frac{1}{3}(2x+1+3x+2+4x-3)=3x$　だから分散は

$$s^2=\frac{1}{3}\left\{(2x+1-3x)^2+(3x+2-3x)^2+(4x-3-3x)^2\right\}=\frac{1}{3}\left\{(1-x)^2+2^2+(x-3)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{3}(1-2x+x^2+4+x^2-6x+9)=\frac{1}{3}(2x^2-8x+14)=\frac{\mathbf{2x^2-8x+14}}{\mathbf{3}}$$

2



(1) $AB=1$のとき $AC=2$, $BC=\sqrt{3}$.

$\triangle ABC$の面積は $\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

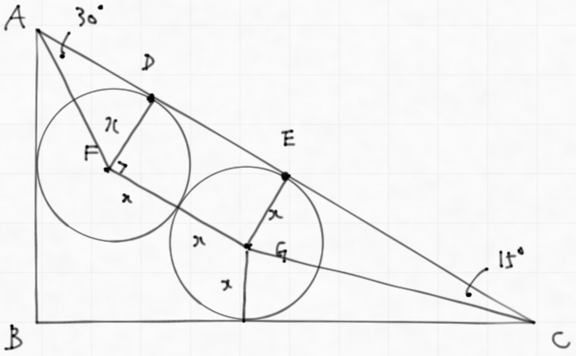
内接円半径をrとして

$r\times\frac{1+2+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $r=\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

(2) $\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin 75^\circ$も同様 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\tan 75^\circ=\frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}$

(3)



$AD=\sqrt{3}x$

$EC=x\tan 75^\circ=(2+\sqrt{3})x$

$DE=2x$

$DC=2x+(2+\sqrt{3})x=(4+\sqrt{3})x$

$AC=\sqrt{3}x+DC=(4+2\sqrt{3})x$

$BC=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=(2\sqrt{3}+3)x=3$

$x=\frac{3}{2\sqrt{3}+3}=\frac{3(2\sqrt{3}-3)}{12-9}=2\sqrt{3}-3$

$AE:EC=AD+DE:EC=(2+\sqrt{3})x:(2+\sqrt{3})x=1:1$

$\triangle ABC$の面積は $BC=3$だから $\frac{1}{2}\times 3\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times 3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\triangle ABE=\frac{AE}{AE+EC}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

3

(1) $a_n = 2n-1$ だから

$a_{2n-1} = 2(2n-1)-1 = \mathbf{4n-3}$, $a_{2n} = 2\cdot 2n - 1 = \mathbf{4n-1}$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{1+19}{2}\times 10 = \mathbf{100}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = \sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2 = 4\sum_{k=1}^{10}k^2 + \sum_{k=1}^{10}(-4k+1) = \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{6}_{\,3}}\times 10\times 11\times \cancel{21}^{\,7} - \frac{\cancel{-3-39}^{\,-21}}{\cancel{2}}\times 10 = 1540 - 210 = \mathbf{1330}$$

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_{2k-1}a_{2k+1}} = \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)\times\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{13}}\right)+\cdots+\frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{37}}-\frac{1}{41}\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{41}\right) = \mathbf{\frac{10}{41}}$$

(2) 第n区画の末項は $2+4+\cdots+2n = n(n+1)$ 項目.

第n区画の初項は $(n-1)n+1 = n^2-n+1$

$a_{n^2-n+1} = 2n^2-2n+2-1 = 2n^2-2n+1$

$n=10$ のとき. $2\times 10^2 - 2\times 10 + 1 = 200-20+1 = \mathbf{181}$

第10区画には20項が含まれ、その初項は181. 公差は2.

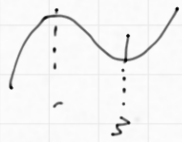
$$\frac{181+181+2\times 19}{2}\times 20 = \mathbf{4000}$$

$2022 \leqq n(n+1)$ を満たすnの最小値は $n=45$

第45区画の最初の項は $45^2-45+1 = 1981$ 項目だから $2022-1981+1=42$

a_{2022} は 第**45**区画の **42** 項目

4　$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$



(1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$

$x = 1$ で 極大値 $f(1) = 1 - 6 + 9 - 2 = \mathbf{2}$

$x = 3$ で 極小値 $f(3) = 27 - 54 + 27 - 2 = \mathbf{-2}$

(2) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 9$ となるのは $x^2 - 4x = 0$ すなわち $x = 0, 4$.

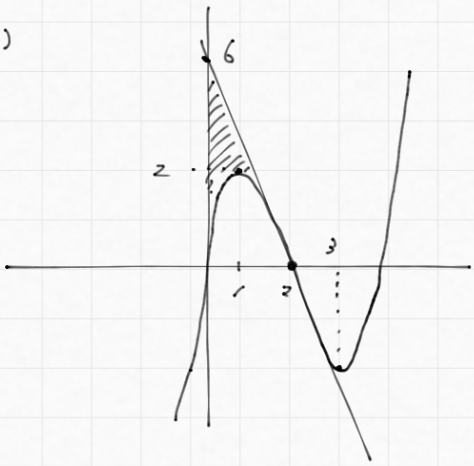
$x = 0$ のとき $f(0) = -2$ だから $y = 9x - \mathbf{2}$

$x = 4$ のとき $f(4) = 64 - 96 + 36 - 2 = 2$ だから $y = 9(x-4) + 2 = 9x - \mathbf{34}$

$f'(x) = 3(x-2)^2 - 3$ だから傾きは $x = 2$ で最小 $f'(2) = -3$

$f(2) = 8 - 24 + 18 - 2 = 0$ なので $y = -3(x-2) + 0 = \mathbf{-3}x + \mathbf{6}$

(3)



$$\int_0^2 \left(-3x + 6 - f(x)\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(-x^3 + 6x^2 - 12x + 8\right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 8x\right]_0^2$$

$$= -4 + 16 - 24 + 16 = \mathbf{4}$$