愛知工業大学2022 前期A

I

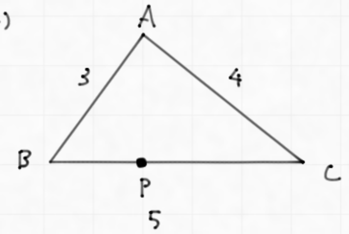
(1)

$$\begin{array}{r} 0.0101\ldots \\ 99\,\overline{)\,100} \\ \underline{99} \\ 100 \\ \underline{99} \\ 1\ldots \end{array}$$

$\frac{1}{99} = 0.010101\cdots = 0.\dot{0}\dot{1}$

$0.\dot{a}\dot{b} = \frac{ab}{99} = \frac{ab}{3 \cdot 3 \cdot 11}$ だから. 分母は **11, 33, 99** のいずれか

(2)



$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 = 4^2 + 3^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 5^2$ より $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\times 3^2 + \frac{1}{3}\times 0 = 6$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times 4^2 = \frac{16}{3}$

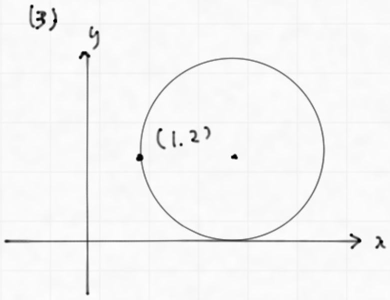
$a_{n+1} = 6a_n + \frac{16}{3}$

$a_{n+1} + \frac{16}{15} = 6\left(a_n + \frac{16}{15}\right)$

$\left\{a_n + \frac{16}{15}\right\}$ は公比 6. 初項 $a_1 + \frac{16}{15} = \frac{16}{15}$ の等比数列

$a_n + \frac{16}{15} = 6^{n-1} \times \frac{16}{15}$ $\qquad a_n = \frac{16 \cdot 6^{n-1} - 16}{15}$

(3)



中心 (X, Y) 半径 Y $\quad (Y > 0)$

$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = Y^2$

$(1, 2)$ を通るので $\quad (1 - X)^2 + (2 - Y)^2 = Y^2 \quad \cdots ①$

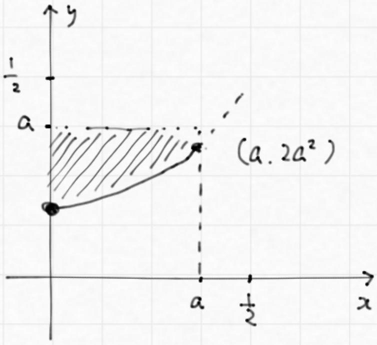
$\Leftrightarrow \quad 1 - 2X + X^2 + 4 - 4Y = 0$

$\Leftrightarrow \quad Y = \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{5}{4}$

(X, Y) の描く軌跡は $\quad y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

① で $X = 4$ とすると $\quad 9 + 4 - 4Y = 0 \quad Y = \frac{13}{4}$ よって半径は $\frac{13}{4}$

(4)



$x^2+a^2=f(x)$ とする

$f(a)=2a^2$

$2a^2-a = a(2a-1) < 0$ だから

$f(a) < a$

Cの面積Sは

$S=\int_0^a a-(x^2+a^2)\,dx = \left[ax-\frac{1}{3}x^3-a^2x\right]_0^a$

$= a^2-\frac{1}{3}a^3-a^3 = \mathbf{a^2(1-\frac{4}{3}a)}$

Aの面積は a^2 だから　$a^2(1-\frac{4}{3}a)=\frac{1}{2}a^2$ のときが Cの面積がAの $\frac{1}{2}$ となるときで

$(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}a)a^2=0$ より　$a=\mathbf{\frac{3}{8}}$

(5) 和をS_nとして　$S_n-S_{n-1}=(1-3^n)-(1-3^{n-1}) = 3^{n-1}(1-3) = -2\cdot3^{n-1}=a_n$　$(n\geqq2)$

$a_n=-2\cdot3^{n-1}$　$(n\geqq2)$

$n=1$のとき　$a_1=S_1=1-3^1=-2$ で、上の結果で$n=1$としたときの値と一致している

∴ $\mathbf{a_n=-2\cdot3^{n-1}}$　$(n\geqq1)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\cdot3^{2n-1}} = \frac{1}{4\cdot3^1}\times\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4\cdot\cancel{3}}\times\frac{\cancel{9}^{\,3}}{8}=\mathbf{\frac{3}{32}}$

(6) ${}_{10}C_3\times{}_7C_3\times{}_4C_4\times3 = \frac{10\cdot9\cdot\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\times\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot5}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\times\cancel{3} = \mathbf{12600}$

女の子の分け方が 3!

男の子7人の分け方は　${}_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times3 = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}}\cdot3 = 630$

$3!\times630 = \mathbf{3780}$

(7) $p=n^2-18n+77=(n-11)(n-7)$

これが素数になるためには $n-11$, $n-7$ のいずれかは ±1 とならなければいけない.

$n-11=1$　　$n=12$　　$p=5$

$n-11=-1$　　$n=10$　　$p=(-1)\times3=-3$ …不適

$n-7=1$　　$n=8$　　$p=-3\times1=-3$ … 〃

$n-7=-1$　　$n=6$　　$p=-5\times(-1)=5$

$n=$ **6** または **12**

$p=$ **5**