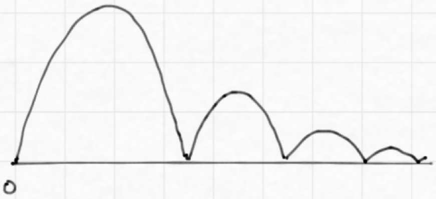
大阪大学2023前期

1

I
$$\begin{cases} x = v_0\cos\theta\cdot t \\ y = v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = v_0\sin\theta - gt \end{cases}$$



問1　$v_y = 0$となるのは $t = \frac{v_0}{g}\sin\theta$

このとき $y = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$

問2　最高点に達するまでの時間の2倍、$t = \frac{2v_0}{g}\sin\theta$で

$y=0$となり。このとき　$x = v_0\cos\theta \times \frac{2v_0\sin\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin2\theta}{g}$

問3　$\sin2\theta = 1$ のとき最大。　$\theta = \frac{\pi}{4}$

問4　e倍の速さではねかえるので、n−1回目からn回目の

衝突までの時間は $\left(\frac{2v_0}{g}\sin\theta\right)e^{n-1}$　したがって

その間の水平移動距離は $\frac{v_0^2\sin2\theta}{g}\times e^{n-1}$

よってn回目の衝突までの移動距離は

$$\frac{v_0^2\sin2\theta}{g}\left(1+e+e^2+\cdots+e^{n-1}\right) = \frac{v_0^2(1-e^n)\sin2\theta}{g(1-e)}$$

II
$$\begin{cases} \text{運動量保存} & MV_0 = mv\cos\theta + MV\cos\phi & \cdots ① \\ & 0 = mv\sin\theta - MV\sin\phi & \cdots ② \\ \text{エネルギー保存} & \frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 & \cdots ③ \end{cases}$$

問5

①②より　$(MV\cos\phi)^2 + (MV\sin\phi)^2 = (MV_0 - mv\cos\theta)^2 + (mv\sin\theta)^2$

$$M^2V^2 = M^2V_0^2 - 2mMV_0v\cos\theta + m^2v^2$$

③より $MV^2 = MV_0^2 - mv^2$ を上式に代入

$$\cancel{M^2V_0^2} - \cancel{m}Mv^2 = \cancel{M^2V_0^2} - 2\cancel{m}MV_0v\cos\theta + m^{\cancel{2}}v^2$$

$$(m+M)v^{\cancel{2}} = 2MV_0\cancel{v}\cos\theta \qquad \therefore\ v = \frac{2M}{m+M}V_0\cos\theta$$

問6　問2の結果より　$L = \frac{1}{g}\left(\frac{2M}{m+M}V_0\cos\theta\right)^2\times\sin2\theta = \frac{8M^2V_0^2\cos^3\theta\sin\theta}{(m+M)^2g}$

問7　$Z = L^2 = \frac{64M^4V_0^4}{(m+M)^4g^2}\left(\cos^6\theta\sin^2\theta\right)$

$$\cos^6\theta\sin^2\theta = (\cos^2\theta)^3(1-\cos^2\theta) = \alpha^3(1-\alpha)$$

$$(\alpha+\Delta\alpha)^3 - (\alpha+\Delta\alpha)^4 - (\alpha^3-\alpha^4) \fallingdotseq 3\alpha^2\Delta\alpha - 4\alpha^3\Delta\alpha$$

$$\Delta Z = \frac{64M^4V_0^4}{(m+M)^4g^2}(3-4\alpha)\alpha^2\Delta\alpha$$

$\Delta Z = 0$となるのは $3-4\alpha = 0$ すなわち $\alpha = \frac{3}{4}$ のときで $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$ より $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ⅲ

問8 $\vec{v}_G = \dfrac{m\vec{v}+M\vec{V}}{m+M} = \dfrac{M}{m+M}\vec{V_0}$ だから $\Delta x_G = \dfrac{M}{m+M}V_0\Delta t$

$$\vec{v}_G = \left(\frac{M}{m+M}V_0,\ 0\right)$$

したがって衝突直前のAの速度は $\left(-\dfrac{M}{m+M}V_0,\ 0\right)$

Bの速度は $\left(V_0-\dfrac{M}{m+M}V_0,\ 0\right) = \left(\dfrac{m}{m+M}V_0,\ 0\right)$

問9 Pから見たAの速度は

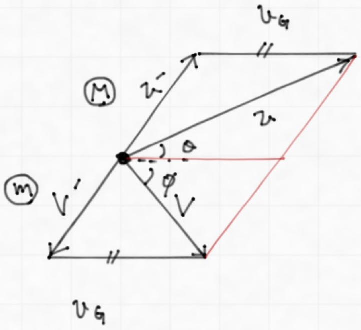
$$v\cos\theta - \frac{M}{m+M}V_0 = \left(\frac{2M}{m+M}V_0\cos\theta\right)\cos\theta - \frac{M}{m+M}V_0 = \frac{MV_0}{m+M}\left(2\cos^2\theta-1\right) = \frac{MV_0}{m+M}\cos 2\theta$$

$$\vec{v}' = \left(\frac{MV_0}{m+M}\cos 2\theta,\ \frac{2M}{m+M}V_0\cos\theta\sin\theta\right)$$

$$v' = \left(\frac{MV_0}{m+M}\right)\left(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{MV_0}{m+M}$$

Pから見たBの速度について、Pから見た、A. Bの運動量の保存を考えて

$$mv' - MV' = 0 \qquad V' = \frac{mV_0}{m+M}$$

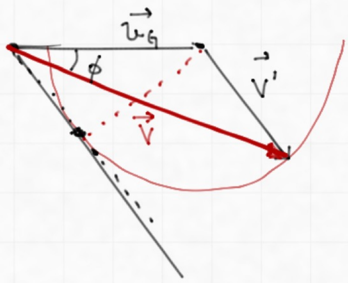


重心から見たとき、A,Bは逆方向に跳ね返っていく

$$\theta'+\phi'=\pi \qquad \therefore\ \sin(\theta'+\phi') = 0$$

問10 $\vec{V}',\ \vec{v}_G$ の大きさは一定。 $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_G$ だから

$$|\vec{V}'| = \frac{mV_0}{m+M} \qquad |\vec{v}_G| = \frac{MV_0}{m+M}$$



$\vec{V}$は左図中の赤線の円周上にあり、

ϕが最大となるのは$\vec{V}$が円と接するとき

このとき

$$\tan\phi = \frac{|\vec{V}'|}{\sqrt{|\vec{v}_G|^2-|\vec{V}'|^2}} = \frac{m}{\sqrt{M^2-m^2}}$$

2

問1　$\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{bs}{d}$ (F) のコンデンサーと $\varepsilon_0\frac{b(a-s)}{d}$ (F) のコンデンサーの並列接続

$$Q(s) = \frac{\varepsilon_0 b}{d}(\varepsilon_r s + a - s)V$$

問2　$I_A = \frac{\Delta Q(s)}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0 b}{d}V(\varepsilon_r-1)\frac{v_s\Delta t}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0 b}{d}V(\varepsilon_r-1)v_s$

容量が増え、電荷が増えているので電流の流れる向きは (i)

問3　$H=\frac{I_A}{2R_A}$　向きは右ねじの法則より裏から表の向き (イ)

問4　コイルBを貫く磁束は $\pi R_B^2\times\mu_0 H$

その単位時間あたりの変化に応じた起電力が発生する

上向きの磁場が強くなっているので下向きの磁場を作る向きの電流が流れる 向きは (iv)

$$V = \pi\mu_0 R_B^2\times\frac{1}{2R_A}\frac{\Delta I_A}{\Delta t} = \pi\mu_0 R_B^2\times\frac{1}{2R_A}\times\frac{\varepsilon_0 b}{d}V(\varepsilon_r-1)\frac{\Delta v_s}{\Delta t}$$

$$= \frac{\pi\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)bR_B^2Vp}{2dR_A} = I_B r \qquad \therefore\ I_B = \frac{\pi\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)bR_B^2Vp}{2dR_Ar}$$

問5　問4より I_B は時間によらず一定値

挿入長がaになるまでの時間を t_a とすると $\frac{1}{2}pt_a^2=a$ より $t_a=\sqrt{\frac{2a}{p}}$

よって消費されるエネルギーは　$I_{B0}^2r\times t_a = I_{B0}^2r\sqrt{\frac{2a}{p}}$

II 問6　コンデンサーの極板間の間隔を y とすると $y=\frac{\Delta d}{a}x+d$

$x=\frac{a}{n}(k-1)$ のとき　$y=\frac{\Delta d}{n}(k-1)+d$ (a)　となり、k番目のコンデンサーの容量は

$$C_k = \varepsilon_0\frac{\frac{a}{n}\times b}{\frac{\Delta d}{n}(k-1)+d}$$　合成容量 C は

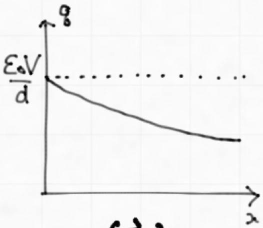
$$C = \sum_{k=1}^{n}C_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_0\frac{ab}{n}}{\frac{\Delta d}{n}(k-1)+d} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_0 ab}{\Delta d(k-1)+nd} \quad \text{(b)}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{\Delta d}{d}(k-1)}\times\frac{\varepsilon_0 ab}{d} = \frac{\varepsilon_0 ab}{d}\left(1-\frac{\Delta d}{2d}\right) \quad \text{(c)}$$

問7　位置xでの単位面積あたりの電気量を q とすると $\frac{q}{\varepsilon_0}\times y=V$ が成り立つので

$$\frac{q}{\varepsilon_0}\times\left(\frac{\Delta d}{a}x+d\right)=V \quad\Leftrightarrow\quad q=\frac{\varepsilon_0 aV}{x\Delta d+ad}$$

問8　変形前はxによらず電荷は一様に分布していた　$\frac{Q}{ab}=\frac{\varepsilon_0\frac{ab}{d}V}{ab}=\frac{\varepsilon_0 V}{d}=\sigma_0$



(え)

問9　$Q=CV$,　$i_A=\frac{dQ}{dt}$,　$\Delta d=\frac{1}{2}gt^2$

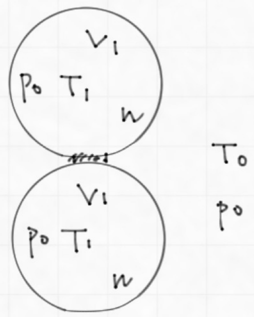
$$i_A = V\frac{dC}{dt} = V\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon_0 ab}{d}\left(1-\frac{\Delta d}{2d}\right)\right) = -\frac{\varepsilon_0 ab}{d}\times\frac{V}{2d}\times\frac{\Delta d}{\Delta t} = -\frac{\varepsilon_0 abgV}{2d^2}t$$

コイルBに生じる誘導起電力は　$V=\pi\mu_0R_B^2\times\frac{1}{2R_A}\frac{\Delta i_A}{\Delta t} = -\frac{\pi\mu_0\varepsilon_0 abgVR_B^2}{4R_Ad^2}$

したがって流れる電流の大きさ i_B は　$i_B=\frac{\pi\mu_0\varepsilon_0 abgVR_B^2}{4R_Ad^2r}$

3A

Ⅰ



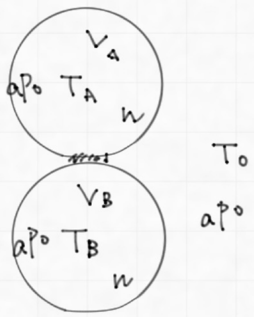
$$\begin{cases} \text{A, B ともに} & p_0 \times V_1 = nRT_1 \\ \text{大気} & p_0 \times 2V_1 = n'RT_0 \\ \text{浮力=重力} & nM_Ag + nM_Bg = n'Mg \end{cases}$$

問1　単位体積あたりの浮力をfとして　$f = \dfrac{n'Mg}{2V_1} = \dfrac{2p_0\cancel{V_1}}{RT_0} \times \dfrac{Mg}{\cancel{2V_1}} = \mathbf{\dfrac{p_0Mg}{RT_0}}$

問2　$\dfrac{\cancel{p_0V_1}}{\cancel{R}T_1}(M_A+M_B) = \dfrac{2\cancel{p_0V_1}}{\cancel{R}T_0}M$　　$T_1 = \mathbf{\dfrac{M_A+M_B}{2M}T_0}$

問3　$n\cdot\dfrac{5}{2}R\cdot(T_1-T_0) + n\cdot\dfrac{7}{2}R(T_1-T_0) = \overset{3}{\cancel{6}}nR \times \dfrac{M_A+M_B-2M}{\cancel{2}M}T_0 = \mathbf{\dfrac{3nRT_0(M_A+M_B-2M)}{M}}$

Ⅱ



加熱前 A, B ともに　$p_0V_2 = nRT_2$

A:　$ap_0V_A = nRT_A$　　　$p_0V_2^{\frac{5}{3}} = ap_0V_A^{\frac{5}{3}}$

B:　$ap_0V_B = nRT_B$　　　$p_0V_2^{\frac{7}{5}} = ap_0V_B^{\frac{7}{5}}$

大気　$ap_0 \times (V_A+V_B) = n''RT_0$

浮力　$nM_Ag + nM_Bg = n''Mg$

問4　ポアソンの式より　$V_A = V_2a^{-\frac{3}{5}}$, $V_B = V_2a^{-\frac{5}{7}}$

$T_A = \dfrac{ap_0V_A}{nR} = \dfrac{p_0V_2}{nR}a^{\frac{2}{5}} = \mathbf{a^{\frac{2}{5}}T_2}$　　　$T_B = \mathbf{a^{\frac{2}{7}}T_2}$

問5　同じ高度になったとき、A, Bともに　　$ap_0V_3 = nRT_3$

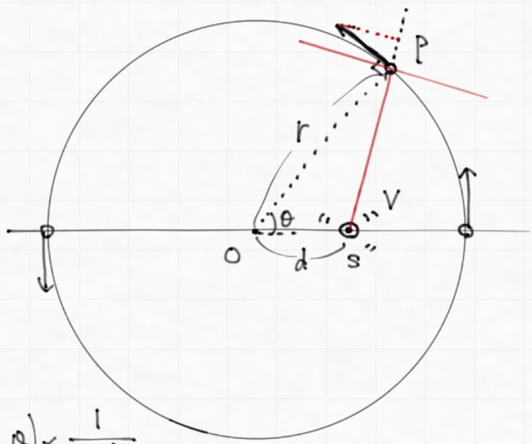
同じ高度でつりあったことから浮力は同じで、これは気球の体積が元と同じになったことを示している

$$2V_3 = V_A + V_B$$

$T_3 = \dfrac{ap_0}{nR} \times \dfrac{V_A+V_B}{2} = \dfrac{\cancel{ap_0}}{2\cancel{nR}}\left(\dfrac{\cancel{nR}T_A}{\cancel{ap_0}} + \dfrac{\cancel{nR}T_B}{\cancel{ap_0}}\right) = \mathbf{\dfrac{T_A+T_B}{2}}$

3B

問6　半周したときに観測する　$\frac{\pi}{\omega}$



問7　余弦定理より

$$SP^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta$$

$$v_{SP} = \vec{v}\cdot\frac{\vec{SP}}{|\vec{SP}|}$$

$$= r\omega\left(\cos(90^\circ+\theta),\ \sin(90^\circ+\theta)\right)\cdot\left(r\cos\theta - d,\ r\sin\theta\right)\times\frac{1}{|\vec{SP}|}$$

$$= \frac{r\omega}{|\vec{SP}|}\left(-\sin\theta,\ \cos\theta\right)\cdot\left(r\cos\theta - d,\ r\sin\theta\right)$$

$$= \frac{r\omega}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}\left(\cancel{-r\cos\theta\sin\theta} + d\sin\theta + \cancel{r\sin\theta\cos\theta}\right) = \frac{rd\omega\sin\theta}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}$$

問8　$\cos\theta = \frac{d}{r}$ だから $\sin\theta = \sqrt{1-\frac{d^2}{r^2}}$

$$v_{SP} = \frac{rd\omega\sqrt{1-\frac{d^2}{r^2}}}{\sqrt{r^2+d^2-2d^2}} = d\omega \quad \text{(a)} \qquad f = \frac{V-d\omega}{V}f_0 \quad \text{(b)}$$

問9　問8と逆　$\cos\theta = \frac{d}{r}$, $\sin\theta = -\sqrt{1-\frac{d^2}{r^2}}$ のときだから　$f = \frac{V+d\omega}{V}f_0$

問10　$\cos\theta = \frac{d}{r} = \frac{1}{2}$ となるので　$\theta = 60^\circ$

$60^\circ \to 300^\circ$ まで $\frac{2}{3}$周するのにかかる時間は　$\frac{2\pi}{\omega}\times\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3\omega}$