広島大学2023

1

(1) $\dfrac{N}{N} \times \dfrac{1}{N} \times \dfrac{1}{N} \times \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{N^3}$

(2) $\dfrac{{}_N P_4}{N^4} = \dfrac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{N^4} = \dfrac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}$

(3) ○○○× カードの選び方 ${}_N C_1 \times {}_{N-1} C_1$

そのカードの並べ方 $\dfrac{4!}{3!}$

確率は $\dfrac{{}_N C_1 \times {}_{N-1} C_1 \times 4}{N^4} = \dfrac{N \cdot (N-1) \times 4}{N^4} = \dfrac{4(N-1)}{N^3}$

(4) ○○×△ カードの選び方 ${}_N C_1 \times {}_{N-1} C_2$

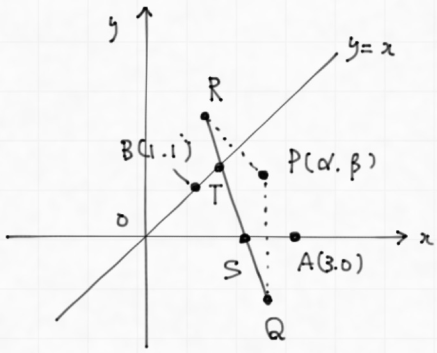
そのカードの並べ方 $\dfrac{4!}{2!}$

確率は $\dfrac{{}_N C_1 \times {}_{N-1} C_2 \times \frac{4!}{2!}}{N^4} = \dfrac{\cancel{N}(N-1)(N-2) \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3}{N^{\cancel{4}\,3} \cdot \cancel{2}} = \dfrac{6(N-1)(N-2)}{N^3}$

2

(1) Qは Pとx軸について対称な点だから $\mathrm{Q}(\alpha, -\beta)$

Rは Pと $y=x$ について対称な点だから $\mathrm{R}(\beta, \alpha)$



(2) 直線OAはx軸だから直線QRがx軸と平行,

すなわち, QとRのy座標が等しいとき, 交点を持たない.

交点を持つのは $\alpha \neq -\beta \iff \alpha+\beta \neq 0$ のとき

QRを $s:1-s$ に内分する点は,

$$\left(s\beta+(1-s)\alpha,\ s\alpha-(1-s)\beta\right)$$

この点のy座標が0のときがx軸との交点だから $s\alpha-(1-s)\beta=0 \iff s=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$

x座標は $s\beta+(1-s)\alpha$ にこの値を代入し $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}$ $\therefore$ Sは $\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}, 0\right)$

(3) 直線OBと直線QRが交点を持たないのは OB // QR のとき.

$\overrightarrow{QR}=(\beta-\alpha, \alpha+\beta)$ だからそれは $\beta-\alpha=\alpha+\beta$ すなわち $\alpha=0$ のときで, 交点を持つための条件は $\alpha \neq 0$

QRを $s:1-s$ に内分する点が $y=x$ 上にあるとき,

$$s\beta+(1-s)\alpha=s\alpha-(1-s)\beta \iff 2s\alpha=\alpha+\beta \iff s=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}$$

$$x=s(\beta-\alpha)+\alpha=\frac{(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)}{2\alpha}+\alpha=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}=y$$

Tは $\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}, \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\right)$

(4) $\overrightarrow{BS}=\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1, -1\right)$, $\overrightarrow{AT}=\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}-3, \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\right)$

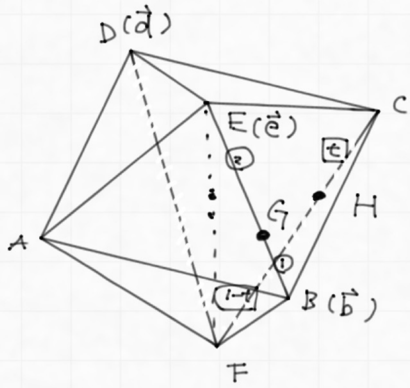
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BS}=3\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1\right)=0$ かつ $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AT}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}-3+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}=0$

$\iff \alpha^2+\beta^2=\alpha+\beta,\quad \alpha^2+\beta^2=3\alpha$

$\alpha+\beta=3\alpha$ より $\beta=2\alpha$ を代入 $\alpha^2+4\alpha^2=3\alpha$ $\quad \alpha=\dfrac{3}{5},\ \beta=\dfrac{6}{5}$

$(\because \alpha \neq 0)$

3



(1) $\angle BAD = 90°$ だから $\vec{b}\cdot\vec{d} = \mathbf{0}$

$\triangle ABE$ は1辺の長さ1の正三角形 $\vec{b}\cdot\vec{e} = 1\cdot1\cdot\cos 60° = \mathbf{\frac{1}{2}}$

$\triangle ADE$ は1辺の長さ1の正三角形 $\vec{d}\cdot\vec{e} = 1\cdot1\cdot\cos 60° = \mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) BDの中点をOとすると $\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$

$\vec{EO} = \vec{OF}$ より

$\vec{AO} - \vec{AE} = \vec{AF} - \vec{AO}$

$\vec{AF} = 2\vec{AO} - \vec{AE} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{e}$ $\quad$ $\mathbf{p=1,\ q=1,\ r=-1}$

(3) $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{e}$

$\vec{AH} = t\vec{AF} + (1-t)\vec{AC} = t(\vec{b}+\vec{d}-\vec{e}) + (1-t)(\vec{b}+\vec{d}) = \vec{b}+\vec{d}-t\vec{e}$

$|\vec{AG}|^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\vec{b}\cdot\vec{e} = \frac{7}{9}$ $\quad$ $|\vec{AG}| = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$|\vec{AH}|^2 = 1 + 1 + t^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{d} - 2t\vec{b}\cdot\vec{e} - 2t\vec{d}\cdot\vec{e} = 2 + t^2 + 0 - t - t = t^2 - 2t + 2$ $\quad$ $|\vec{AH}| = \sqrt{t^2-2t+2}$

$\vec{AG}\cdot\vec{AH} = \left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{e}\right)\cdot\left(\vec{b}+\vec{d}-t\vec{e}\right) = \frac{2}{3} + 0 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}t = 1 - \frac{2}{3}t$

$\triangle AGH = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{AG}|^2|\vec{AH}|^2 - (\vec{AG}\cdot\vec{AH})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}\times(t^2-2t+2) - \left(\frac{2}{3}t-1\right)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t + \frac{5}{9}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{27}}$

よって $\triangle AGH$ は $t = \mathbf{\frac{1}{3}}$ のとき最小となり 最小値は $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{27}} = \mathbf{\frac{\sqrt{42}}{18}}$

4

(1) $b_1 = \log_2 \frac{a_1}{1^2} = \log_2 2 = 1$

$a_2 = \left(\frac{1^6(1+1)}{a_1^3}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$, $b_2 = \log_2 \frac{a_2}{2^2} = \log_2 \frac{1}{64} = \mathbf{-6}$

(2) $a_{n+1} = \left(\frac{n^6(n+1)}{a_n^3}\right)^2$ について底を2とした対数をとる

$\log_2 a_{n+1} = 2\left(\log_2 n^6(n+1) - 3\log_2 a_n\right)$

$b_n = \log_2 \frac{a_n}{n^2} = \log_2 a_n - 2\log_2 n$, $b_{n+1} = \log_2 a_{n+1} - 2\log_2(n+1)$ を代入

$b_{n+1} + 2\log_2(n+1) = 2\left(6\log_2 n + \log_2(n+1) - 3(b_n + 2\log_2 n)\right)$

$b_{n+1} = -6b_n + \cancel{12\log_2 n} + \cancel{2\log_2(n+1)} - \cancel{12\log_2 n} - \cancel{2\log_2(n+1)}$

$b_{n+1} = -6b_n$

これは $\{b_n\}$ が公比 -6 の等比数列であることを示している.

(3) $\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k = \frac{1}{6^{2n}}\left(\log_2 1 + \log_2 2 + \cdots + \log_2 n\right) = \frac{1}{6^{2n}}\log_2(n!) < \frac{1}{6^{2n}}\log_2 n^n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 n^n}{6^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}} = 0$ および. $\frac{1}{6^{2n}}\log_2 n! > 0$ と上式より

はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k = 0$ であることが示される.

(4) (2) および $b_1 = 1$ より $b_n = (-6)^{n-1}$

$\log_2 \frac{a_n}{n^2} = (-6)^{n-1}$ より $\frac{a_n}{n^2} = 2^{(-6)^{n-1}} \Leftrightarrow a_n = n^2 \cdot 2^{(-6)^{n-1}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_{2k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 (2k)^2 \cdot 2^{(-6)^{2k-1}}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\left\{2\log_2(2k) + (-6)^{2k-1}\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\left\{2\log_2 k + 2 + (-6)^{2k-1}\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k + \frac{2n}{6^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}}\times(-6)\times\frac{6^{2n}-1}{36-1}\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k + \frac{2n}{6^{2n}} - \frac{6}{35}\left(1 - \frac{1}{6^{2n}}\right)\right\}$

$= 0 + 0 - \frac{6}{35} = \mathbf{-\frac{6}{35}}$

5

(1) 真数条件より $\frac{3x+3}{x^2+3}>0 \Leftrightarrow x>-1$

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{3x+3}{x^2+3}}\times\frac{3(x^2+3)-3(x+1)\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{\cancel{(x^2+3)}\times\cancel{3}(x^2+3-2x^2-2x)}{\cancel{3}(x+1)\times(x^2+3)^{\cancel{2}}}$$

$$=\frac{-(x+3)(x-1)}{(x+1)(x^2+3)}$$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	↗		↘

$f'(x)=0$ となるのは $x=1$ $(\because x>-1)$

$f(x)$ の増減は右表のようになる

$f(1)=\log\frac{3+3}{1+3}=\log\frac{3}{2}$

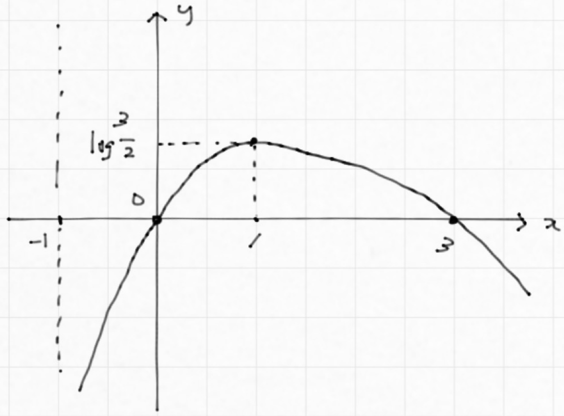
$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+\frac{3}{x}}{x+\frac{3}{x}}\right)=-\infty$

$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}\frac{3(x+1)}{x^2+3}=-\infty$

$f(x)=0$ となるのは $\frac{3x+3}{x^2+3}=1$ を解いて

$x=3, 0$

$f(x)$ のグラフの概形は右のようになる



(2) $y=f(x)$ と $y=s$ のグラフの交点の数が $f(x)=s$ の解の数と一致するので

$s>\log\frac{3}{2}$ のとき 0個　$s=\log\frac{3}{2}$ のとき 1個　$s<\log\frac{3}{2}$ のとき 2個

(3) $\int_0^3\frac{2x^2}{x^2+3}dx=\int_0^3\left(2-\frac{6}{x^2+3}\right)dx=\int_0^3 2\,dx-6\int_0^3\frac{1}{x^2+3}dx$

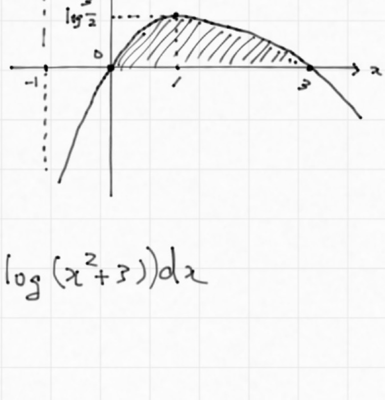
$\int_0^3\frac{1}{x^2+3}dx$ について $x=\sqrt{3}\tan\theta$ とすると $\frac{dx}{d\theta}=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$

x	$0\to 3$
θ	$0\to\frac{\pi}{3}$

$$\int_0^3\frac{1}{x^2+3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\tan^2\theta+3}\times\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

したがって

$$\int_0^3\frac{2x^2}{x^2+3}dx=\Big[2x\Big]_0^3-\cancel{6}^{\,2}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{9}_{\,3}}\pi=\boldsymbol{6-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi}$$



(4) $\alpha=\log\frac{3}{2}$　$\int_0^{\alpha}g(s)ds$ は右グラフの斜線部の面積と一致する

$$\int_0^{\alpha}g(s)ds=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\log\frac{3x+3}{x^2+3}dx=\int_0^3\left(\log 3(x+1)-\log(x^2+3)\right)dx$$

$$\int_0^3 \log 3(x+1)\,dx = \Big[x\log 3 + (x+1)\log(x+1) - (x+1)\Big]_0^3 = 3\log 3 + 4\log 4 - 4 + 1 = 3\log 3 + 8\log 2 - 3$$

$$\int_0^3 \log(x^2+3)\,dx = \Big[x\log(x^2+3)\Big]_0^3 - \int_0^3 x \times \frac{2x}{x^2+3}\,dx$$

$$= 3\log 12 - 0 - \int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}\,dx$$

$$= 6\log 2 + 3\log 3 - \left(6 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\right) \quad (\because (3))$$

よ、て

$$\int_0^3 \Big(\log 3(x+1) - \log(x^2+3)\Big)dx = \cancel{3\log 3} + 8\log 2 - 3 - 6\log 2 - \cancel{3\log 3} + 6 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

$$= \mathbf{2\log 2 + 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$