京都工芸繊維大学2023 後期

1 (1) $f'(x) = (\cos x + 2\cos x \sin x)e^{\sin x} + (\sin x - \cos^2 x)e^{\sin x}\cos x$

$= e^{\sin x}\cos x(1 + 2\sin x + \sin x - \cos^2 x)$

$= \frac{1}{2}e^{\sin x}\sin 2x(\sin x + 3)$

$f'(x) = 0$ となるのは $\sin 2x = 0$ のときで $x = \frac{\pi}{2} \times n$ （nは整数）

$\sin x + 3 > 0$, $e^{\sin x} > 0$ だから $\sin 2x$ の正負によって増減が決まる

$\sin x$ は周期 2π , $\sin 2x$ は周期 π の周期関数だから. $f(x)$ は周期 2π の周期関数だから $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で増減を考えると.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	

$f(0) = (0-1)e^0 + 2e = 2e - 1$

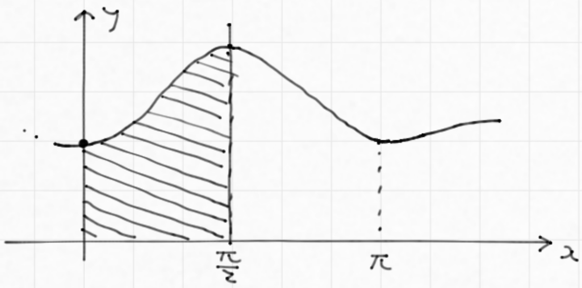
$f(\frac{\pi}{2}) = (1-0)e^1 + 2e = 3e$

$f(\pi) = (0-1)e^0 + 2e = 2e - 1$

$f(\frac{3}{2}\pi) = (-1-0)e^{-1} + 2e = 2e - \frac{1}{e}$

$f(2\pi) = f(0) = 2e - 1$

最大値は **3e**　最小値は **2e−1**



(2) $(\cos x\, e^{\sin x})' = -\sin x\, e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x}$

だから $f(x) = -(\cos x\, e^{\sin x})' + 2e$

$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(\cos x\, e^{\sin x})' + 2e\,dx$

$= \left[-\cos x\, e^{\sin x} + 2ex\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + e\pi - (-e^0 + 0) = \boldsymbol{e\pi + 1}$

2

(1) $f_n'(x) = 3x^2 + 2nx + 6n^2 = 3\left(x+\frac{n}{3}\right)^2 + \frac{17}{3}n^2 > 0$

したがって $f_n(x)$ は単調に増加する.

$f_n(0) = -9n^2 - 1 < 0$. $f_n(2) = 8 + 4n + 12n^2 - 9n^2 - 1 = 3n^2 + 4n + 7 > 0$

だから $f_n(x) = 0$ は $0 < x < 2$ の範囲にただ1つの実数解をもつ.

(2) $f_n(a_n) = 0$ だから

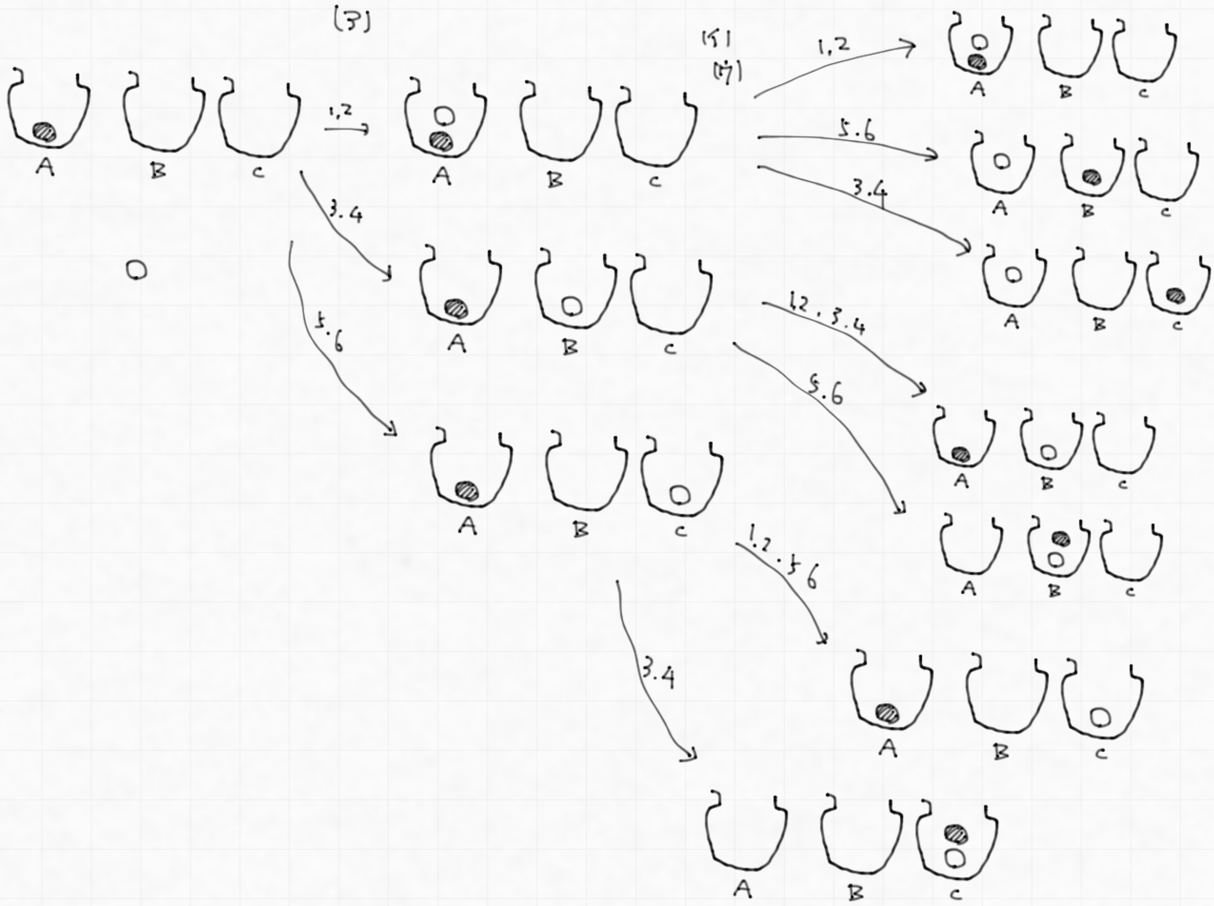
$$a_n^3 + na_n^2 + 6n^2a_n - 9n^2 - 1 = 0$$

$$a_n(a_n^2 + na_n + 6n^2) = 9n^2 + 1$$

$$a_n = \frac{9n^2+1}{a_n^2 + na_n + 6n^2} = \frac{9 + \frac{1}{n^2}}{\frac{a_n^2}{n^2} + \frac{a_n}{n} + 6} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$$

3



(1) $p_1 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

(2) (イ)で 5.6がでて Cが空なのは (ア)で 1.2.3.4がでたときで $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$

このうち、(ウ)のあとで同じつぼに赤、白が入っているのは (ア)で3.4、(イ)で5.6とでたとき

$$p_2 = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

(3) (ウ)の後でAに赤、白ともにはいっているのは (ア)で 1,2、(イ)で 1,2 のとき $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$$p_3 = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{p_1} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

4

$z^2-6z+10$ が実数だから

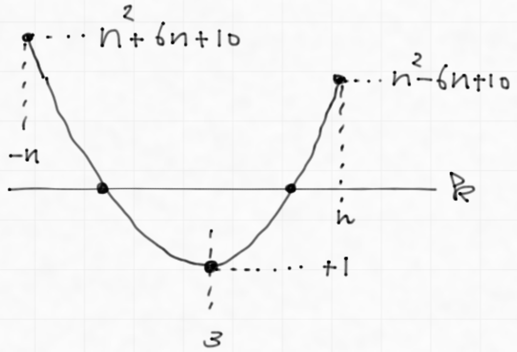
$z^2-6z+10=\overline{(z^2-6z+10)}$

$z^2-\bar{z}^2-6z+6\bar{z}=0$

$(z-\bar{z})(z+\bar{z}-6)=0$

$z=\bar{z}$ または $\frac{z+\bar{z}}{2}=3$ だから zは実数または実部が3

(i) zが実数のとき



$|z|\leqq n$ は $-n\leqq z\leqq n$

$f(z)=z^2-6z+10=(z-3)^2+1$

$f(z)$のグラフは右のようになり、

$f(z)=k$ (kは整数) となるzは

$k=1$, $n^2-6n+10<k\leqq n^2+6n+10$ のとき

1つずつ。(合計 $n^2+6n+10-(n^2-6n+10)+1=12n+1$)

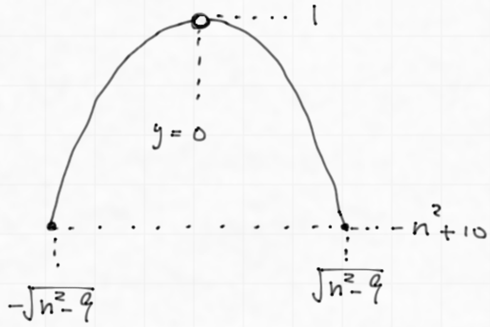
$1<k\leqq n^2-6n+10$ のとき

2つずつ (合計 $(n^2-6n+10-1)\times 2=2n^2-12n+18$)

以上、あわせると $2n^2-12n+18+12n+1=2n^2+19$

(ii) zが虚数のとき。

zの実部は3で $z=3+yi$ $(y\neq 0)$ とおける。



このとき

$f(z)=(3+yi)^2-6(3+yi)+10=1-y^2$

$|z|\leqq n$ より $3^2+y^2\leqq n^2$

$-\sqrt{n^2-9}\leqq y\leqq\sqrt{n^2-9}$

$f(z)=k$ (kは整数) となるのは

$-n^2+10\leqq k\leqq 0$ につき2つずつで $\{0-(-n^2+10)+1\}\times 2=2n^2-18$

(i)(ii)を全て併せて

$2n^2+19+(2n^2-18)=$ **$4n^2+1$**