早稲田大学2023理工

1 (1) $(3x+2)^n$ を x^2+x+1 で割った商を $P_n(x)$ と表す

$$(3x+2)^n = (x^2+x+1)P_n(x) + a_n x + b_n \quad \cdots ①$$

$$(3x+2)^{n+1} = (x^2+x+1)P_{n+1}(x) + a_{n+1}x + b_{n+1} \quad \cdots ②$$

①②より

$$\{(x^2+x+1)P_n(x) + a_n x + b_n\}(3x+2) = (x^2+x+1)P_{n+1}(x) + a_{n+1}x + b_{n+1}$$

$$(x^2+x+1)(3x+2)P_n(x) + 3a_n x^2 + 2a_n x + 3b_n x + 2b_n = (x^2+x+1)P_{n+1}(x) + a_{n+1}x + b_{n+1}$$

左辺を x^2+x+1 で割った余りは $3a_n x^2 + 2a_n x + 3b_n x + 2b_n$ を x^2+x+1 で割った余りと等しく

$$3a_n x^2 + 2a_n x + 3b_n x + 2b_n = 3a_n(x^2+x+1) + a_{n+1}x + b_{n+1}$$

が成り立っている.

xの係数を比較して. $2a_n + 3b_n = 3a_n + a_{n+1}$, $2b_n = 3a_n + b_{n+1}$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_{n+1} = -a_n + 3b_n}\ ,\ \boldsymbol{b_{n+1} = -3a_n + 2b_n}$$

(2) $n=1$のとき. $(3x+2)^1$ を x^2+x+1 で割った余りは $3x+2$ だから $a_1 = 3$. $b_1 = 2$

$n=2$のとき　$a_2 = -3+3\cdot2 = 3$.　$b_2 = -3\cdot3 + 2\cdot2 = -5 \equiv 2 \pmod 7$

このことから. a_n , b_nを7で割った余りは 3と2であると予想でき. これを数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$のときは 上記の通り. $a_1 = 3$. $b_1 = 2$ なので予想は正しい

(ii) $n=k$のとき.

$$a_k \equiv 3.\ \ b_k \equiv 2 \pmod 7$$ (以下合同式は全て7を法とする)

が成り立つと仮定する.

このとき　$a_{k+1} = -a_k + 3b_k \equiv -3 + 3\times2 \equiv 3$

$b_{k+1} = -3a_k + 2b_k \equiv -3\times3 + 2\times2 \equiv -5 \equiv 2$

よって仮定の下で $n=k+1$のときも予想は成り立つ

(i)(ii)より. 数学的帰納法により予想が正しいことは示された.

よって a_n. b_nは7で割り切れないことが示された.

(3)

$$\begin{array}{rrcll} & a_{n+1} & = & -a_n + 3b_n & \times 2 \\ -) & b_{n+1} & = & -3a_n + 2b_n & \times 3 \\ \hline & 2a_{n+1} - 3b_{n+1} & = & 7a_n & \end{array}$$

$$a_n = \frac{2}{7}a_{n+1} - \frac{3}{7}b_{n+1}$$

$$b_n = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n = \frac{3}{7}a_{n+1} - \frac{1}{7}b_{n+1}$$

$$b_n = \frac{3}{7}a_{n+1} - \frac{1}{7}b_{n+1}$$

a_{n+1} と b_{n+1} が $p>1$, $p\neq0$ を満たす共通の素因数 pを持つとすると (pは整数)

$a_{n+1} = pa$, $b_{n+1} = pb$ と表すことができる (a. bは自然数で. 互いに素とする)

このとき　$7a_n = p(2a-3b)$. $7b_n = p(3a-b)$

ここで p は 7 の倍数ではないため a_n および b_n は 7 を因数にもつ

これを繰り返すと、$a_{n-1}, a_{n-2} \ldots a_1$, $b_{n-1}, b_{n-2} \ldots b_1$ は全て p を因数にもつことになるが、

$a_1 = 3$, $b_1 = 2$ であることから a_1 と b_1 は互いに素であるため矛盾が生じる。

よって a_{n+1} と b_{n+1} は互いに素であり、このことから全ての n に対して a_n と b_n は互いに素であることが示された。

2

(1) $P_1(0)=\frac{1}{2}$ … 黒をとりだす．　$P_1(1)=\frac{1}{2}$ … 赤をとりだす．

$P_2(0)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ … 連続して黒をとり出す．

$P_2(1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ … 赤・黒または黒・赤ととり出す．

$P_2(2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ … 連続して赤をとり出す．

以上より　$P_1(k)=\frac{1}{2}\ (k=0.1)$ ，$P_2(k)=\frac{1}{3}\ (k=0.1.2)$

$P_n(k)=\frac{1}{n+1}$ と予想できるので数学的帰納法でこれを示す．

(i) $n=1$ のとき．上記のとおり $P_1(k)=\frac{1}{2}\ (k=0.1)$

(ii) $n=l$ のとき．（l は自然数）

$P_l(k)=\frac{1}{l+1}\quad(l=0.1.2\ldots l)$ が成り立つと仮定する．

このとき　$P_{l+1}(0)=P_l(0)\times\frac{l+1}{l+2}=\frac{1}{l+1}\times\frac{l+1}{l+2}=\frac{1}{l+2}$

$P_{l+1}(l+1)=P_l(l)\times\frac{l+1}{l+2}=\frac{1}{l+1}\times\frac{l+1}{l+2}=\frac{1}{l+2}$

$1\leqq m\leqq l$ を満たす m について

$$P_{l+1}(m)=P_l(m-1)\times\frac{m}{l+2}+P_l(m)\times\frac{l-m+1}{l+2}=\frac{m+l-m+1}{(l+1)(l+2)}=\frac{1}{l+2}$$

以上より仮定の下で

$P_{l+1}(k)=\frac{1}{l+2}\quad(k=0.1.2\ldots l+1)$ が成り立つことが示された．

(i)(ii) より．

数学的帰納法により全ての自然数 n に対し．

$P_n(k)=\frac{1}{n+1}\quad(k=0.1.2,\ldots n)$ が成り立つことが示された．

(2)

$$Q_n(k)=\overset{\text{黒}}{\frac{b}{r+b}}\times\overset{\text{黒}}{\frac{b+1}{r+b+1}}\times\overset{\text{黒}}{\frac{b+2}{r+b+2}}\times\cdots\times\overset{\text{赤}}{\frac{r}{r+b+k-1}}\times\overset{\text{黒}}{\frac{b+k-1}{r+b+k}}\times\cdots\times\overset{\text{黒}}{\frac{b+n-2}{r+b+n-1}}$$

$$=\frac{(r+b-1)!\,(b+n-2)!\,r}{(r+b+n-1)!\,(b-1)!}$$

これは k を含まないので $Q_n(k)$ は k によらず一定．

3

(1) $y = e^{x-2} \Leftrightarrow \log y = x-2 \Leftrightarrow x = \log y + 2$

したがって $y = e^{x-2}$ の逆関数は $y = \log x + 2$　したがって $y = \log x + 2$ の逆関数は $y = e^{x-2}$

証明終

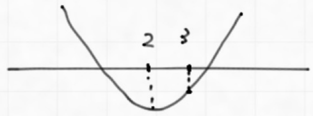
(2) $e^{x-2} - x = h(x)$ とおく．　$h'(x) = e^{x-2} - 1$

$h'(x) = 0$ となるのは $x = 2$ のときで．$h(x)$ の増減は右のようになる

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$，$\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$

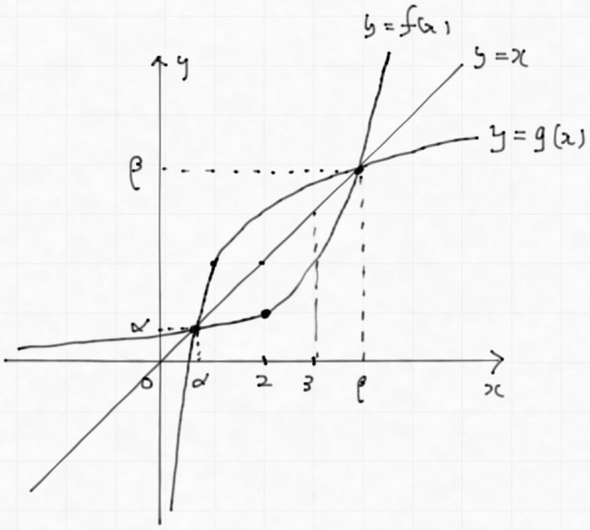
$h(2) = e^0 - 2 = -1$．$h(e) = e^{e-2} - e < 0$．$h(3) = e - 3 < 0$



$y = h(x)$ のグラフは右のようになり $h(x) = 0$ となる x は 2つ存在し、

これは $y = f(x)$ と $y = x$ が 2点で交わることを示している

(3)



(4) $S = \int_\alpha^\beta (x - e^{x-2})\,dx \times 2 = 2\left[\frac{1}{2}x^2 - e^{x-2}\right]_\alpha^\beta = \beta^2 - \alpha^2 - 2e^{\beta-2} + 2e^{\alpha-2}$

$f(\alpha) = e^{\alpha-2} = \alpha$．$f(\beta) = e^{\beta-2} = \beta$ だから

$S = \beta^2 - \alpha^2 - 2\beta + 2\alpha = \mathbf{(\beta-\alpha)(\alpha+\beta-2)}$

4

(1) $z=1$ のとき　$w=\frac{3}{1}=\mathbf{3}$

$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき　$w=\frac{3\cdot 2}{1+\sqrt{3}i}=\frac{6(1-\sqrt{3}i)}{4}=\mathbf{\frac{3(1-\sqrt{3}i)}{2}}$

$z=\sqrt{3}i$ のとき　$w=\frac{3}{\sqrt{3}i}=\mathbf{-\sqrt{3}i}$

(2) $\alpha z=\{(1-t)+t\sqrt{3}i\}\times\frac{3-\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}\left(3-\cancel{3t}+3\sqrt{3}ti-\sqrt{3}i+\sqrt{3}ti+\cancel{3t}\right)$

$=\frac{3}{2}+\frac{4\sqrt{3}t-\sqrt{3}}{2}i$

αz の実部は $\mathbf{\frac{3}{2}}$

$(w-\alpha)(\overline{w-\alpha})=\left(\frac{3}{z}-\alpha\right)\left(\frac{3}{\bar{z}}-\bar{\alpha}\right)=\frac{1}{z\bar{z}}(3-\alpha z)(3-\overline{\alpha z})$

$=\frac{1}{|z|^2}\left(9-3\alpha z-3\overline{\alpha z}+|\alpha z|^2\right)=\frac{|\alpha z|^2}{|z|^2}$　　$(\because\ 3(\alpha z+\overline{\alpha z})=9)$

$=|\alpha|^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=\mathbf{3}$

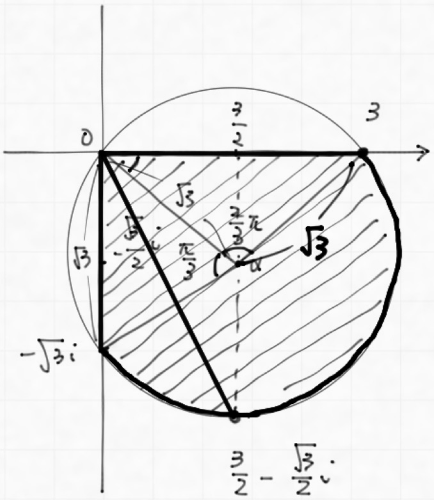
(3) (2)の z で $t=0$ とすると $z=1$ となり. $t=1$ とすると $z=\sqrt{3}i$ となるので.

(2)の z で $0\leqq t\leqq 1$ のときが線分ABに対応する.

また $t=\frac{1}{2}$ とすると $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり (1)より このとき $w=\frac{3(1-\sqrt{3}i)}{2}$ となる

(2)より $|w-\alpha|^2=3 \iff |w-\alpha|=\sqrt{3}$. だから w は中心 α. 半径 $\sqrt{3}$ の円で.

(1)から $t=0,\ \frac{1}{2},\ 1$ のときの w を考えて. L の通過する範囲は次のようになる



$\arg\alpha=-\frac{\pi}{6}+2n\pi$.

$0,\ \alpha,\ -\sqrt{3}i$ の三点からなる三角形は正三角形

よって. もとめる面積は

$\pi\sqrt{3}^2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{3}{2}\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\mathbf{\frac{3}{2}(\pi+\sqrt{3})}$

5

(1) $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, -4, -2)$

$|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4 - 8 + 4 = 0$

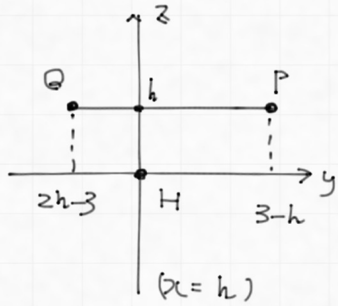
$\cos\angle BAC = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = 0$. $\therefore \angle BAC = \dfrac{\pi}{2}$

(2) Pは線分ABを$2-h:h$に内分する $\overrightarrow{OP} = \dfrac{h}{2}\overrightarrow{OA} + \dfrac{2-h}{2}\overrightarrow{OB} = (h, -h+3, h)$

Qは線分ACを$2-h:h$に内分する $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{h}{2}\overrightarrow{OA} + \dfrac{2-h}{2}\overrightarrow{OC} = (h, 2h-3, h)$

$P(h, -h+3, h)$, $Q(h, 2h-3, h)$

(3) P, Q, $(h, 0, 0)$ … これをHとするの3点は $x=h$上にある(右図)



Qのy座標が0以上($2h-3 \geqq 0$)のとき.

線分PQとHとの最短距離は

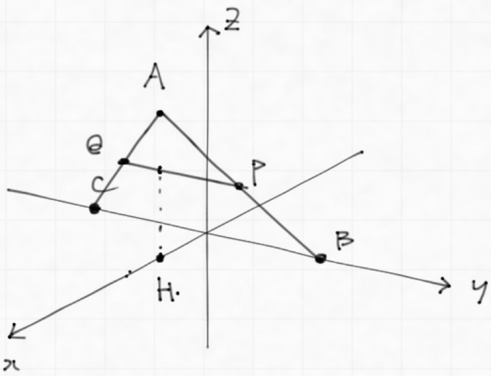
$$QH = \sqrt{h^2 + (2h-3)^2} = \sqrt{5h^2 - 12h + 9}$$

Qのy座標が0より小さい($2h-3 < 0$)のとき

線分PQとHとの最短距離は h

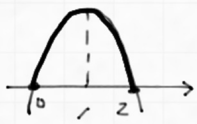
最短距離は $\begin{cases} h & (0 \leqq h < \frac{3}{2}) \\ \sqrt{5h^2 - 12h + 9} & (\frac{3}{2} \leqq h \leqq 2) \end{cases}$

(3)



$HP^2 = (3-h)^2 + h^2 = 2h^2 - 6h + 9$

$HQ^2 = (2h-3)^2 + h^2 = 5h^2 - 12h + 9$



$HP^2 - HQ^2 = -3h^2 + 6h = -3(h-1)^2 + 3$

$0 \leqq h \leqq 2$のとき $HP^2 - HQ^2 \geqq 0$だから $HP \geqq HQ$

$\triangle ABP$をx軸で回転させた立体と$x=h$の断面は

$0 \leqq h < \frac{3}{2}$のとき. (左図1)

断面積Sは $S = \pi HP^2 - \pi h^2 = \pi(h^2 - 6h + 9)$

$\frac{3}{2} \leqq h \leqq 2$のとき. (図2)

$S = \pi HP^2 - \pi HQ^2 = \pi(-3h^2 + 6h)$

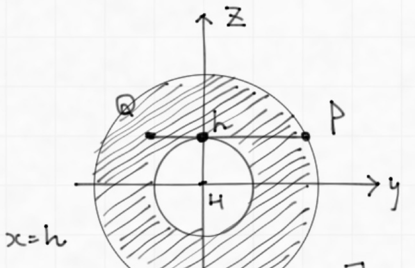


図1

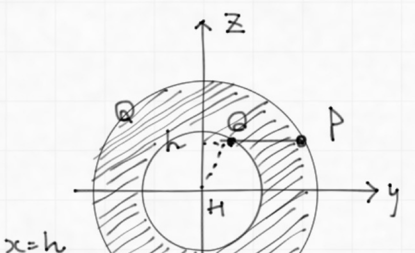


図2

回転体の体積Vは

$$V = \int_0^2 S\,dh = \pi\int_0^{\frac{3}{2}}(h^2 - 6h + 9)\,dh + \pi\int_{\frac{3}{2}}^{2}(-3h^2 + 6h)\,dh$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3}(h-3)^3\right]_0^{\frac{3}{2}} + \pi\left[-h^3 + 3h^2\right]_{\frac{3}{2}}^{2}$$

$$= \pi\left(-\frac{9}{8} + 9\right) + \pi(-8 + 12) - \pi\left(-\frac{27}{8} + \frac{27}{4}\right)$$

$$= \frac{17}{2}\pi$$