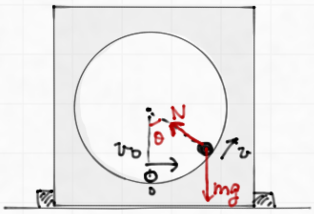
慶應義塾大学2023理工

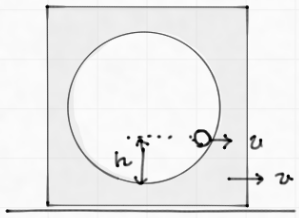


1 (1) エネルギー保存 $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\theta)$

運動方程式 $m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta$

(ア) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき $\cancel{\frac{1}{2}}mv_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}}mv^2 + \cancel{\frac{1}{2}}mgR$ $\quad v = \sqrt{v_0^2 - gR}$

(イ) $N = \frac{m}{R}(v_0^2 - gR) + mg\times\frac{1}{2} = \frac{mv_0^2}{R} - \frac{1}{2}mg$



(ウ) $\theta = \alpha$ のとき $N = 0$

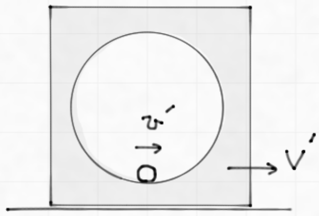
$$\frac{1}{R}\left(v_0^2 - 2gR(1-\cos\alpha)\right) = -g\cos\alpha$$

$$v_0^2 = 2gR - 3gR\cos\alpha \qquad \therefore\ v_0 = \sqrt{gR(2-3\cos\alpha)}$$

(2) 小球がKから見て静止したとき、小球とKの水平方向の速度は等しくなっている（これを u とする）

運動量保存 $mv_1 = mv + Mv$

エネルギー保存 $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + mgh$



(エ) $v = \frac{m}{m+M}v_1$

(オ) $h = \left(\frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}\cancel{(m+M)}\frac{m}{(m+M)^{\cancel{2}}}v_1^2\right)\frac{1}{g} = \frac{Mv_1^2}{2g(m+M)}$

エネルギーが保存しているので弾性衝突したと考えてもよい

$$\frac{v_1 - 0}{v' - V'} = -1$$

(カ) 運動量保存 $mv_1 = mv' + MV'$

エネルギー保存 $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$

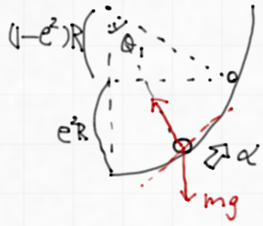
$$mv_1^2 = mv'^2 + M\left(\frac{m(v_1-v')}{M}\right)^2 \Leftrightarrow v_1^2 = v'^2 + \frac{m}{M}(v_1-v')^2$$

$$\Leftrightarrow (m+M)v'^2 - 2mv_1v' + (m-M)v_1^2 = 0 \Leftrightarrow v' = \frac{m \pm \sqrt{m^2-(m^2-M^2)}}{m+M}v_1 = \frac{m\pm M}{m+M}v_1$$

$v' \neq v_1$ だから $v' = \frac{m-M}{m+M}v_1$, $V' = \frac{2m}{m+M}v_1$

(3) (キ) はねかえることで速度が e 倍になり、その運動エネルギーが e^2 倍になることから

高さ e^2R まで登ることが分かる（右図） $\cos\theta_1 = \frac{(1-e^2)R}{R} = 1-e^2$



(ク) 重力の成分のみ $-mg\sin\theta$

(ケ) 接線方向の加速度を α として

$$m\alpha = -mg\sin\theta \fallingdotseq -mg\frac{x}{R} = -mx\omega^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

周期は $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. 衝突は半周期毎におこるので $\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

2

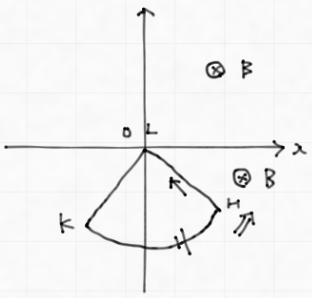
(1) (ア) 扇形回路を貫く下向きの磁束が減少するので大きさ $\pi a^2 \times \frac{\omega}{2\pi} B = \frac{1}{2}a^2\omega B$ (V) の起電力が生じる. その向きは磁束の減少を妨げる、時計まわり(O→H→K→L)の向きに電流を流そうとする向きで、実際に、その向きに電流が流れる. (Qが高電位)　　∴ $V = \mathbf{\frac{1}{2}a^2\omega B}$

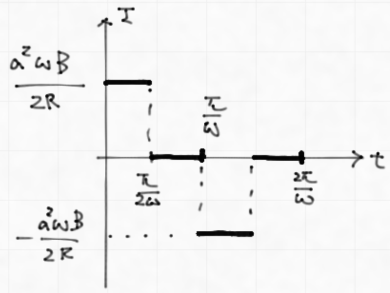
(イ) $I_1 = \frac{1}{2}a^2\omega B \times \mathbf{\frac{1}{R}}$

(ウ) $F_{KL} = B \times I_1 \times a = \mathbf{\frac{a^3\omega B^2}{2R}}$

(エ) $\frac{1}{4}$ 周すると扇形回路が磁場のある $x>0$ の領域からはずれる.　　$t_1 = \frac{2\pi}{\omega}\times\frac{1}{4} = \mathbf{\frac{\pi}{2\omega}}$

(オ) $0 \sim t_1$ … I_1(A)　$t_1 \sim 2t_1$ … 0(A)　$2t_1 \sim 3t_1$　$-I_1$　$3t_1 \sim 4t_1$ … 0.





(カ) $I_1^2 R \times \frac{\pi}{2\omega} \times 2 = \frac{a^4\omega^{\cancel{2}}B^2}{4R^{\cancel{2}}} \times \cancel{R} \times \frac{\pi}{\cancel{\omega}} = \mathbf{\frac{\pi a^4\omega B^2}{4R}}$

(キ) $I_1^2 R \times \frac{\pi}{2\omega} = f_H \times 2a\pi \times \frac{1}{4}$　　$f_H = \frac{\cancel{a^4}^{3}\cancel{\omega^2}B^2}{4R^{\cancel{2}}} \times \cancel{R} \times \frac{\pi}{\cancel{2\omega}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{a\pi}} = \mathbf{\frac{\pi a^3 B^2}{4R}}$

(2) (ク) 回路を流れる電流は0となった…とあるので定常状態

$Q = C\cdot\frac{1}{2}a^2\omega B = \mathbf{\frac{1}{2}a^2\omega BC}$

(ケ) コンデンサーに蓄えられていたエネルギーがジュール熱として失われる

$\frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a^2\omega BC\cdot\frac{1}{2}a^2\omega B = \mathbf{\frac{1}{8}a^4\omega^2B^2C}$

(コ) $t_1 < t < 2t_1$ のときの回路の式は

$\frac{q}{C} = IR$

これより $q = \mathbf{CIR}$

3 (1)

(ア) $p_0 SL = 1 \cdot R \cdot T_1$ より $T_1 = \dfrac{p_0SL}{R}$

(イ) $p_0 + \dfrac{Mg}{S}$

(ウ) $\Delta U_{12} = \dfrac{3}{2}R(T_2 - T_1) = \dfrac{3}{2}\left(p_0 + \dfrac{Mg}{S}\right)SL - \dfrac{3}{2}p_0SL$

$= \dfrac{3Mg}{2S} SL = \dfrac{3}{2}MgL$

(エ) $W_{23} = \left(p_0 + \dfrac{Mg}{S}\right)S\left(\dfrac{5}{3}L - L\right) = \dfrac{2}{3}(p_0S + Mg)L$

(オ) $Q_{23} = \dfrac{5}{2}R(T_3 - T_2) = \dfrac{5}{3}(p_0S + Mg)L$

(2) (カ) $\left(p_0 + \dfrac{Mg}{S} - \dfrac{1}{3}kL \cdot \dfrac{1}{S}\right) S \cdot \dfrac{5}{3}L = 1 \cdot R \cdot T_5$

より. $(p_0S + Mg - \frac{1}{3}kL)\frac{5}{3}L = RT_5$

$T_5 = \dfrac{5L}{3R}(p_0S + Mg - \frac{1}{3}kL)$

(キ) $Q_{45} = \dfrac{3}{2}R(T_5 - T_4)$

$= \dfrac{5}{2}SL\left(p_0 + \dfrac{Mg}{S} - \dfrac{1}{3}kL \cdot \dfrac{1}{S}\right) - \dfrac{5}{2}p_0SL$

$= \dfrac{5}{2}L(Mg - \frac{1}{3}kL)$

吸収した熱量は $-Q_{45} = \dfrac{5}{2}L(\frac{1}{3}kL - Mg)$

(ク) $p_6 = p_0 + \dfrac{Mg}{S} - \dfrac{kL}{S}$

(ケ) W_{56} = 平均圧力 × 体積変化

$= \dfrac{1}{2}\left(p_0 + \dfrac{Mg}{S} - \dfrac{1}{3}kL \cdot \dfrac{1}{S} + p_0 + \dfrac{Mg}{S} - kL \cdot \dfrac{1}{S}\right) \times S \times (L - \frac{5}{3}L)$

$= \left(p_0 + \dfrac{Mg}{S} - \dfrac{2}{3}kL\dfrac{1}{S}\right)S(-\frac{2}{3}L) = (p_0S + Mg - \frac{2}{3}kL)(-\frac{2}{3}L)$

$= -\dfrac{2}{3}L(p_0S + Mg - \frac{2}{3}kL)$

(状態1) $p_0 SL = 1 \cdot R \cdot T_1$

$\downarrow$ 定積 $Q_{12} = 0 + \dfrac{3}{2}R(T_2 - T_1)$

(状態2) $\left(p_0 + \dfrac{Mg}{S}\right)SL = 1 \cdot R \cdot T_2$

$\downarrow$ 定圧 $\dfrac{5}{2}R(T_3 - T_2) = \left(p_0 + \dfrac{Mg}{S}\right)S\left(\dfrac{5}{3}L - L\right) + \dfrac{3}{2}R(T_3 - T_2)$

(状態3) $\left(p_0 + \dfrac{Mg}{S}\right)S\dfrac{5}{3}L = 1 \cdot R \cdot T_3$

$\downarrow$ 定積 $Q_{34} = 0 + \dfrac{3}{2}R(T_4 - T_3)$

(状態4) $p_0 S \cdot \dfrac{5}{3}L = RT_4$,

$\downarrow$ 定積 $Q_{45} = 0 + \dfrac{3}{2}R(T_5 - T_4)$

(状態5) $\left(p_0 + \dfrac{Mg}{S} - \dfrac{1}{3}kL \cdot \dfrac{1}{S}\right) S \cdot \dfrac{5}{3}L = 1 \cdot R \cdot T_5$

$\downarrow$ ばね $Q_{56} = \dfrac{1}{2}\left(p_0 + \dfrac{Mg}{S} - \dfrac{1}{3}kL \cdot \dfrac{1}{S} + p_0 + \dfrac{Mg}{S} - kL \cdot \dfrac{1}{S}\right) \times S \times (L - \frac{5}{3}L) + \dfrac{3}{2}R(T_6 - T_5)$

(状態6) $\left(p_0 + \dfrac{Mg}{S} - kL \cdot \dfrac{1}{S}\right)S \cdot L = 1 \cdot R \cdot T_6$