近畿大2023 2/13

I

(1) (i) $x+y=\dfrac{(\sqrt{5}+2)^2+(\sqrt{5}-2)^2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\dfrac{(5+4)\times 2}{5-2^2}=\mathbf{18}$ アイ

$xy=1$

$\dfrac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=18^2-1=\mathbf{323}$ ウエオ

(ii) $0<y<1$ だから $y=b$.

$x+y=18 \Leftrightarrow x=18-b$ だから $x=17+a$ であり $18-b=17+a$ より $a+b=1$

$\dfrac{a^2}{b}=\dfrac{(1-b)^2}{b}=b-2+\dfrac{1}{b}=y+x-2=\mathbf{16}$ カキ

(2) 偶数2枚 または 奇数2枚 $\dfrac{{}_4C_2+{}_5C_2}{{}_9C_2}=\dfrac{\cancel{4}\cdot 3+5\cdot\cancel{4}}{9\cdot\cancel{8}\,2}=\dfrac{8}{18}=\mathbf{\dfrac{4}{9}}$ クケ

奇数2枚が余事象 $1-\dfrac{{}_5C_2}{{}_9C_2}=1-\dfrac{5\cdot\cancel{4}}{9\cdot\cancel{8}\,2}=\mathbf{\dfrac{13}{18}}$ コサシス

(3) $\log_{10} x^{\log_{10} x}>\log_{10}(1000x)^k$

$(\log_{10} x)^2>k\log_{10} 10^3x=k(3+\log_{10} x)$

$(\log_{10} x)^2-k\log_{10} x-3k>0$

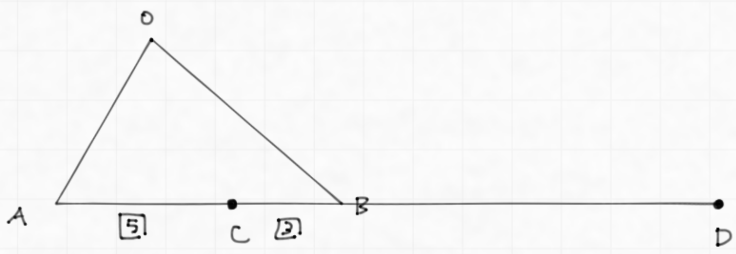
$\log_{10} x=X$ とおく　$x>0$ のとき Xは任意の実数値をとり．そのとき．

$X^2-kX-3k>0$

が成り立つためには $X^2-kX-3k=0$ の判別式Dが負の値とならなければいけない

$D=k^2+12k<0 \Leftrightarrow \mathbf{-12}<k<\mathbf{0}$ セソタ チ

(4) $\overrightarrow{OC}=\mathbf{\dfrac{3}{8}}\overrightarrow{OA}+\mathbf{\dfrac{5}{8}}\overrightarrow{OB}$ ツテトナ



$\overrightarrow{OD}=\dfrac{-3}{5-3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{5}{5-3}\overrightarrow{OB}$

$=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{5}{2}\overrightarrow{OB}$

$p\overrightarrow{OA}-q\overrightarrow{OB}=p\left(\dfrac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{OB}\right)-q\left(-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{5}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$p=\dfrac{3}{8}p+\dfrac{3}{2}q$ かつ $-q=\dfrac{5}{8}p-\dfrac{5}{2}q$

$5p=12q$　　$p:q=12:5$　　$p=\mathbf{12}$ ニヌ　$q=\mathbf{5}$ ネ

Ⅱ

1 | 4 7 | 10 13 16 | 19 22 25 28 | 31 . . . .

(1) $a_n = 1 + 3(n-1) = 3n-2$

$a_{20} = 3 \cdot 20 - 2 = \mathbf{58}$ アイ

$S_{20} = \dfrac{a_1 + a_{20}}{2} \times 20 = (1+58) \times 10 = \mathbf{590}$ ウエオ

(2) 第n群の末項は $1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ 番目の項で、

$30 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$ を満たす最小のnは $n=8$ ∴ 第**8**群に属している カ

(3) 第12群の末項は $\frac{1}{2} \times 12 \times 13 = 78$ 項目 $a_{78} = 3 \times 78 - 2 = 232$

第12群の末項は **232** キクケ、これは第 **78** コサ 項である

(4) 第11群の末項は $\frac{1}{2} \times 11 \times 12 = 66$ $a_{67} = 3 \cdot 67 - 2 = 199$

第12群は 199, 202, …, 232 の 12項だから、総和は $\dfrac{199+232}{2} \times 12 = \mathbf{2586}$ シスセソ

(5) 135群の末項は $\frac{1}{2} \times 135 \times 136 = 135 \times 68$ 項

134群の 〃 $\frac{1}{2} \times 134 \times 135 = 135 \times 67$ 項

$a_n = 3n - 2 = 10m + 6$ とおくことができる（mは整数）

$\Leftrightarrow \quad 3n - 10m = 8$ …①

① を満たす n, m の組みとして $n=6,\ m=1$ が考えられるので

$$\begin{array}{rl} 3n - 10m = 8 & \\ 3 \cdot 6 - 10 \cdot 1 = 8 & (- \\ \hline 3(n-6) - 10(m-1) = 0 & \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad 3(n-6) = 10(m-1)$$

右辺は10の倍数だから $n-6 = 10k$ （kは整数）

$n = 10k + 6$

以上より、 $135 \times 67 < 10k + 6 \leqq 135 \times 68$ を満たす整数kの数をもとめればよく、

$903.9 < k \leqq 917.4$ $k = 904, 905 \cdots, 917$ の **14** 個 タチ

(6) 第n群の総和をTnとすると

$$T_n = a_{\frac{1}{2}(n-1)n+1} + \cdots + a_{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

$$= \left[\left\{\frac{3}{2}n(n-1) + 3 - 2\right\} + \left\{\frac{3}{2}n(n+1) - 2\right\}\right] \times \frac{1}{2} \times n = \frac{1}{2}n(3n^2 - 1)$$

$\frac{1}{2}n(3n^2-1) = 10N + 9$ と表せるときを考える （Nは整数）

$3n^3 - n = 20N + 18$

nを20を法として分類し、順に調べると $n \equiv 3, 13, 9, 19, 14, 18 \pmod{20}$

よって 1〜135 に $6 \times 6 + 4 = \mathbf{40}$ ツテ 個ある

111　$f(x)=x^2-(6a+2)x+12a = (x-(3a+1))^2+12a-(3a+1)^2 = (x-3a-1)^2-9a^2+6a-1$

$g(x) = x^2-(6a+2)x+9a^2+6a = (x-(3a+1))^2+9a^2+6a-(3a+1)^2 = (x-3a-1)^2-1$

(1)　x 方向に $\mathbf{0}^{ア}$.　y 方向に　$-1-(-9a^2+6a-1) = \overset{イ}{\mathbf{9}}a^2 - \overset{ウ}{\mathbf{6}}a$　平行移動

(2)　$(X, Y) = (3a+1,\ -9a^2+6a-1)$ とすると

$3a = X-1$

$Y = -(X-1)^2+2(X-1)-1 = -X^2+4X-4$

もとめる軌跡は　$y = -x^2+\overset{エ}{\mathbf{4}}x-\mathbf{4}^{オ}$

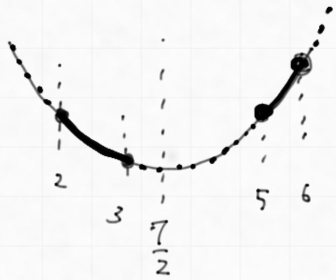
$g(x)$ の頂点の軌跡は　$y = \mathbf{-1}^{カキ}$

(3)　$f(x) = (x-6a)(x-2)$,　$g(x) = (x-3a)(x-3a-2)$

$a=1$ のとき　$f(x) = (x-6)(x-2) \leqq 0 \iff 2 \leqq x \leqq 6$

$g(x) = (x-3)(x-5) \geqq 0 \iff x \leqq 3,\ x \geqq 5$.

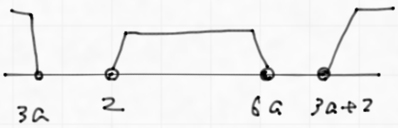
$f(x) \leqq 0$ かつ $g(x) \geqq 0 \iff 2 \leqq x \leqq 3,\ 5 \leqq x \leqq 6$



$y = x^2-7x+\frac{57}{4} = (x-\frac{7}{2})^2+2$

$x=\overset{ク}{\mathbf{3}}$ のとき最小　$(3-\frac{7}{2})^2+2 = \mathbf{\frac{9}{4}}^{ケコ}$

(4)　$6a>2$ のとき　$(a>\frac{1}{3})$

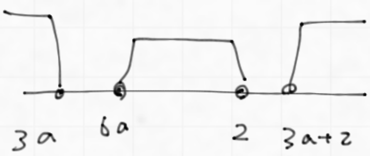


$3a<2$ かつ $6a<3a+2$

$a<\frac{2}{3}$,　$a<\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$

$6a \leqq 2$ のとき　$(a \leqq \frac{1}{3})$



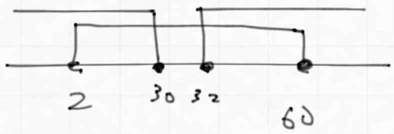
$3a<6a$,　$2<3a+2$

$a>0$.　　$0<a \leqq \frac{1}{3}$

まとめると　$\overset{サ}{\mathbf{0}} < a < \mathbf{\frac{2}{3}}^{シス}$

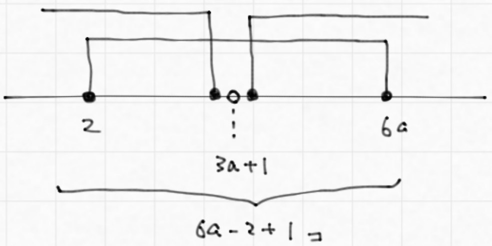
(5) (i)　$a=10$ のとき　$f(x) \leqq 0 \iff 2 \leqq x \leqq 60$

$g(x) \geqq 0 \iff a \leqq 30,\ a \geqq 32$



総和は　$2+3+\cdots+30+32+\cdots+60 = \frac{2+60}{2} \times 59 - 31 = 31 \times 58 = \mathbf{1798}^{セソタチ}$

(ii) $a > \frac{1}{3}$ のとき．$f(x) \leqq 0$ は $2 \leqq x \leqq 6a$．$g(x) \geqq 0$ は $x \leqq 3a$，$x \geqq 3a+2$



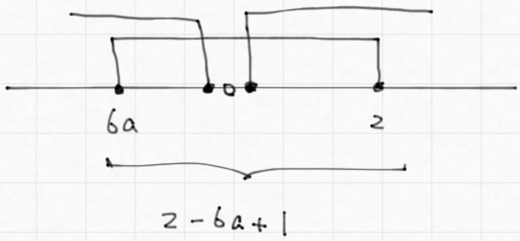
$6a-2+1-1 = 6a-2 = 88$ となるとき、条件を満たす

$a = 15$

$6a-2+1-1 = 6a-2 = 80$ となるのは $a = \frac{82}{6}$

これは整数ではない．

(iii) $a \leqq \frac{1}{3}$ のとき



$2-6a+1-1 = 88$ となるのは $a = \frac{86}{6}$

$2-6a+1-1 = 80$ となるのは $a = -13$

ツテ

以上より，整数 x がちょうど 88 個あるのは $a = 15$ のとき

トナニ

〃 80 〃 $a = -13$ のとき