同志社女子2020 1/26

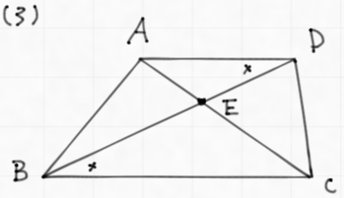
1

(1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ より $x+y=2\sqrt{5}$

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(2\sqrt{5})^2-2\times 3}{3}=\mathbf{\frac{14}{3}}$$

(2) $3102_{(4)}=3\times 4^3+4^2+2=3\times 2^6+16+2=3\times 8^2+2\times 8+2=\mathbf{322_{(8)}}$

(3)



AD//BCの台形なら相似だが、
AB//CDの台形だと相似とは限らない。
相似だと AD//BC
∴ 必要条件だが十分条件ではない ①

(4) 33人の中央値は17番目の人だから $3+6+a=17$ $a=\mathbf{8}$ が最小

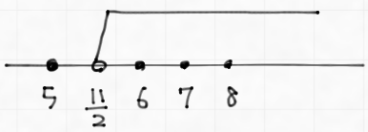
2

(1) $6x+9 \geqq 3x+9a+12$

$x \geqq 3a+1$

$x=5$ が $x \geqq 3a+1$ を満たさない

$5<3a+1 \iff a>\mathbf{\frac{4}{3}}$



(2) $504=2^3\cdot 3^2\cdot 7^1$ $n=2^a\cdot 3^b\cdot 7^c$ $a=0,1,2$, $b=0,1,2$, $c=0,1$

$3\times 3\times 2=\mathbf{18}$ 通り

(3) $3(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta+1=0$

$3\cos^2\theta+4\cos\theta-4=0$

$(3\cos\theta-2)(\cos\theta+2)=0$ $\cos\theta=\mathbf{\frac{2}{3}}$ $(\because \cos\theta \geqq -1)$

(4) 2種の手が出たときに勝負がつく。

${}_3C_2(2^5-2)=3\times 30=\mathbf{90}$ 通り。

3

(1) $f(x) = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + a$　　　$a = \frac{1}{4}$ のとき．x 軸に接する．

このとき　$g(x) = -x^2 + bx - \frac{1}{2}$　$= -(x-\frac{b}{2})^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{1}{2}$　だから

b の値により共有点をもつときと，持たないときがある　②

(2)　x 方向に1．y 方向に-4　平行移動

$$y = (x-1)^2 - (x-1) + a - 4 = x^2 - 3x + a - 2$$

これを x 軸について対称移動

$$y = -x^2 + 3x - a + 2$$

これが $g(x)$ と一致

$3 = b$　かつ　$-a+2 = -2a$　　　　$a = -2$，$b = 3$

(3)　$x^2 - x - 2 < -x^2 + 3x + 4$

$2x^2 - 4x - 6 < 0$

$(x-3)(x+1) < 0$　　　$\therefore$　$-1 < x < 3$

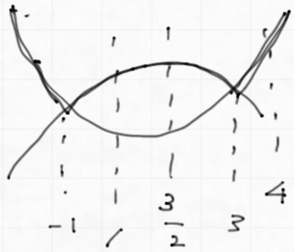
(4)

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & (x \leqq -1,\ x \geqq 3) \\ -x^2 + 3x + 4 & (-1 < x < 3) \end{cases}$$

$-1 < \sqrt{3} - 2 < 3$ だから

$h(\sqrt{3}-2) = g(\sqrt{3}-2) = -(\sqrt{3}-2)^2 + 3(\sqrt{3}-2) + 4 = -9 + 7\sqrt{3}$

$-x^2 + 3x + 4 = -(x-\frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}$



$h(4) = f(4) = 16 - 4 - 2 = 10$

$h(1) = g(1) = -1 + 3 + 4 = 6$

$h(3) = f(3) = 9 - 3 - 2 = 4$　　　　最大値は 10

最小値は 4

$h(t) = h(t+1)$ となるのは．

$t \leqq -1$，$t+1 \geqq -1$ のとき．　　$f(t) = g(t+1)$

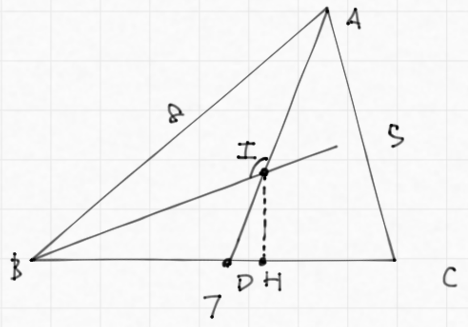
$t^2 - t - 2 = -(t+1)^2 + 3(t+1) + 4$ より　$t^2 - t - 4 = 0$　　$\therefore t = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$

$-2 \leqq t \leqq -1$ を満たすのは　$\frac{1-\sqrt{17}}{2} < 0$　なので確．

$-1 \leqq t$，$t+1 \leqq 3$ のとき　　$g(t) = g(t+1)$　より　$t = 1$

$t \leqq 3$，$t+1 \geqq 3$ のとき　　$g(t) = f(t+1)$　より　$t = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

4



(1)

$$\cos\angle BAC = \frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8} = \frac{1}{2}$$

$$\angle BAC = 60^\circ$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\times5\times8\times\sin60^\circ = 10\sqrt{3}$$

(2) $BD:DC = AB:AC = 8:5$ だから $BD = 7\times\frac{8}{8+5} = \frac{56}{13}$

$$\triangle ABD = \triangle ABC\times\frac{8}{13} = \frac{8}{13}\times10\sqrt{3} = \frac{1}{2}AB\cdot AD\sin30^\circ = \frac{1}{2}\times8\times AD\times\frac{1}{2}$$

$$AD = \frac{40}{13}\sqrt{3}$$

IHは内接円の半径

$$IH\times\frac{5+7+8}{2} = 10\sqrt{3} \qquad IH = \sqrt{3}$$

(3) $BH = \frac{AB+BC-AC}{2} = \frac{8+7-5}{2} = 5.$

$$DH = BH - BD = 5 - \frac{56}{13} = \frac{9}{13}$$

$$BI = \sqrt{IH^2+BH^2} = \sqrt{3+25} = 2\sqrt{7}$$

$\triangle AIB$で正弦定理 $\frac{8}{\sin\angle AIB} = \frac{2\sqrt{7}}{\sin30^\circ}$

$$\sin\angle AIB = \frac{8}{2\sqrt{7}}\times\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$