慶應義塾大学・理工学部2023

1

(1) $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^3 + x^2 a + x a^2 + a^3)}{x - a}$

$= \lim_{x \to a} (x^3 + a x^2 + a^2 x + a^3) = a^3 + a^3 + a^3 + a^3 = 4a^3$

(2) $\lim_{x \to +0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$

$\lim_{x \to -0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{-x\sqrt{x^2+1}}{x} = -1$

よって $\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$ は存在せず，$g(x)$ は $x = 0$ で微分可能ではない．

(3) $0 \leqq p < q \leqq 1$ を満たす p, q を考える．

平均値の定理より，

$$\frac{h(q) - h(p)}{q - p} = h'(c), \quad p < c < q$$

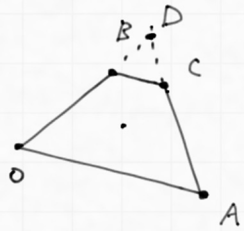
を満たす c が少なくとも1つ存在する．このとき，

$h(q) - h(p) = (q - p)h'(c) < 0$ 　　$(\because\ 0 < c < 1$ のとき $h'(c) < 0$, $q > p)$

より $h(q) - h(p) < 0$ すなわち $h(q) < h(p)$ が成りたつので，

$[0, 1]$ において，$h(x)$ は減少することが示された．

2



(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 28k - 20k + 8k = 16k$

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{4^2+4^2+(4\sqrt{2})^2}\,k = 8k$

$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{7^2+5^2+(-\sqrt{2})^2} = \sqrt{76}$

$\cos\angle AOB = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} = \dfrac{16k}{2\sqrt{19}\cdot 8k} = \dfrac{\sqrt{19}}{19}$

$\sin\angle AOB = \sqrt{1-\dfrac{1}{19}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$

OACBの面積 $= (OA+BC)\times\dfrac{1}{2}\times OB\times\sin\angle AOB$

$= \dfrac{5}{4}|\overrightarrow{OA}|\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{76}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}} = \dfrac{5}{8}\times 8k\times 6\sqrt{2} = \mathbf{30\sqrt{2}\,k}$

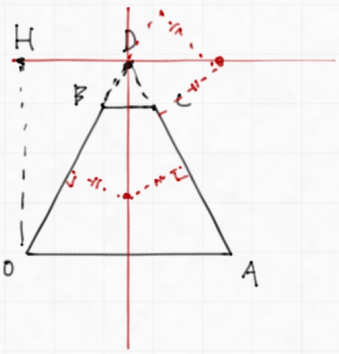
$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}|^2 = 76 + \dfrac{9}{\cancel{16}}\times \overset{4}{\cancel{64}}k^2 - \dfrac{3}{2}\times 16k = 36k^2 - 24k + 76$

$AC = \mathbf{2\sqrt{9k^2-6k+19}}$

(2) 円に内接する台形は等脚台形のみ　$OB = AC$

$\sqrt{76} = 2\sqrt{9k^2-6k+19}$　　$\mathbf{k = \dfrac{2}{3}}$

(3)



平面OAB上に限定すると　△OBPと△ACPの面積が等しくなるのはOAの垂直二等分線上と、Dを通ってOAと平行な直線上にPが存在するとき。

このことから、αはDを通ってOA,BCの中点を結ぶ直線と垂直な平面だと分かる

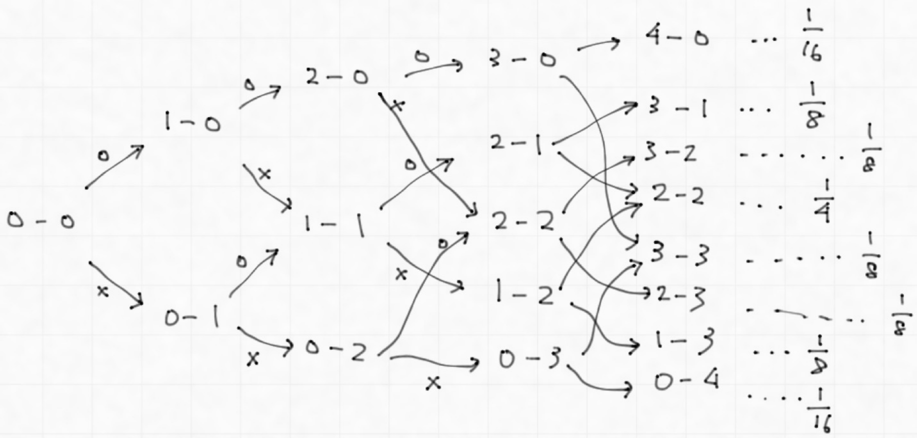
BからOAに下ろした垂線の長さは　$OB\sin\angle AOB = \sqrt{76}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}} = 6\sqrt{2}$

$OD : BD = OA : BC = 4:1$ だから　左図中で

$OH = \dfrac{4}{3}\times 6\sqrt{2} = \mathbf{8\sqrt{2}}$

3

Aが a個 Bがb個の状態を a−b と表す．表を○ 裏を×と表す



(1) 上の表より $\overset{4-0}{\frac{1}{16}} + \overset{3-1}{\frac{1}{8}} + \overset{3-2}{\frac{1}{8}} + \overset{3-3}{\frac{1}{8}} = \frac{7}{16}$

4−0, 3−3 のときは 3連続で表．

3−1, 3−2 のときは 3連続表が．5回目裏．6.7回目表．

$$\frac{\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\times\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}{\frac{7}{16}} = \left\{\left(\frac{3}{\cancel{16}}\right)\times\frac{1}{8}+\frac{4}{\cancel{16}}\times\frac{2}{8}\right\}\times\frac{\cancel{16}}{7} = \frac{11}{56}$$

(2) n回目の時点でAの袋の方が多い確率が p_n だとするとBの袋の方が多い確率も p_n

したがって同数の確率は $1-2p_n$

$$p_{n+1} = p_n\times\frac{1}{2} + (1-2p_n)\times\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ p_{n+1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_n$$

上の式を $p_{n+1}-\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$ と変形すると．

$\left\{p_n-\frac{1}{3}\right\}$ は 初項 $p_1-\frac{1}{3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列だから一般項は

$$p_n-\frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{1}{6}$$

$$p_n = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

(3) 1回の事象で起こることを以下のように表す.

表が出てAの数が1増える … A↑　　　表が出てA,Bが同数になる … A△

裏が出てB 〃 … B↑　　　裏が出てA,Bが同数になる … B△

- n回の操作で袋Aにn個の玉がある

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & n \\ A\uparrow & A\uparrow & A\uparrow & A\uparrow & \cdots & A\uparrow \end{array}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots ①$$

- n回の操作で袋Aに$n-1$個の玉がある

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & n \\ A\uparrow & A\uparrow & \cdots & A\uparrow & B\triangle & & & \\ & & & & & A\uparrow & \cdots & A\uparrow \\ B\uparrow & B\uparrow & & B\uparrow & A\triangle & & & \end{array}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$2\leqq k\leqq n$ だから、確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times(n-1) \quad \cdots ②$

①②より、n回の操作で、袋Aに$n-1$個以上の玉がある確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times(n-1) = \frac{2n-1}{2^n}$$

- n回の操作で袋Aに$n-2$個の玉がある

(i) $a\geqq b$ のとき.

袋Aが最大で、かつ$n-2$個となるのは、最大個数が増えないA△またはB△が2度おこったとき.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & & k-1 & k & k+1 & & l-1 & l & l+1 & n-1 & n \\ A\uparrow & A\uparrow & \cdots & A\uparrow & B\triangle & A\uparrow & \cdots & A\uparrow & B\triangle & & & \\ & & & & & & & & & A\uparrow \;\cdots & A\uparrow & A\uparrow \\ B\uparrow & B\uparrow & \cdots & B\uparrow & A\triangle & B\uparrow & \cdots & B\uparrow & A\triangle & & & \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 2\times\left(\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 2\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{4}{2^n}$$

$$2\leqq k,\ k+1<l\leqq n \iff 2\leqq k<l-1\leqq n-1$$

$2\sim n-1$から異なる2つを選ぶ。選び方は ${}_{n-2}C_2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2!}$

確率は $\frac{4}{2^n}\times\frac{(n-2)(n-3)}{2!} = \frac{(n-2)(n-3)}{2^{n-1}}$

(ii) $a<b$ のとき.

Aは$n-2$個 Bが$n-1$個に限られ、このとき、$n-1$回目にA△またはB△がおこっている

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ A\uparrow & A\uparrow & \cdots & A\uparrow & B\triangle & \\ & & & & & B\uparrow \\ B\uparrow & B\uparrow & \cdots & B\uparrow & A\triangle & \end{array}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2} = \frac{2}{2^n}$$

以上より袋Aの玉の個数が$n-2$以上となるのは

$$\frac{2n-1}{2^n}+\frac{(n-2)(n-3)}{2^{n-1}}+\frac{2}{2^n} = \frac{2n-1+2(n-2)(n-3)+2}{2^n} = \frac{2n^2-8n+13}{2^n}$$

(3)（前半の別解）

n回目のとき Aに $n-1$ 個の玉がある確率を q_n とする

Aに n 個の玉があるのは n回連続 表のときのみ $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

B 〃 裏 〃 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

AにもBにも $n-1$ 個の玉がある $n-1$回目までは表または裏が出続けてn回目に逆の面がでたときのみ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{1}{2}\times 2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$q_{n+1}=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{2}}_{n-0\ 裏}+\underbrace{q_n\times\frac{1}{2}}_{表}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{2}}_{0-n\ 表}$$

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$2^{n+1}q_{n+1}=2^nq_n+2$$

$$2^nq_n=2(n-4)+2^4\cdot q_4=2n-8+2^4\cdot\frac{6}{16}=2n-2$$

(1)より $\left(q_4=\frac{1}{8}\times 3\right)$

$$q_n=\frac{2n-2}{2^n}$$

∴ n回目終了時に Aに $n-1$ 個以上の玉があるのは

$$q_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\mathbf{\frac{2n-1}{2^n}}$$

$a=n-2$ が難かしく断念…

4 (1) 両辺とも正なので2乗する

$$b^2 \leqq (b+1-b\cos x)^2 = b^2+1+b^2\cos^2 x+2b-2b^2\cos x-2b\cos x$$

$$b^2\cos^2 x-2b^2\cos x-2b\cos x+2b+1\geqq 0$$

$\cos x = X$とおくと $0\leqq x\leqq \frac{\pi}{2}$だから $0\leqq X\leqq 1$であり不等式は

$$b^2X^2-2b^2X-2bX+2b+1\geqq 0$$

$$(bX-2b-1)(bX-1)\geqq 0 \quad \cdots ①$$

(i) $b\neq 0$のとき $X\leqq \frac{1}{b}$ または $X\geqq 2+\frac{1}{b} \quad \cdots ②$

$0\leqq X\leqq 1$の範囲で②の不等式が常に成り立つための条件は

$1\leqq \frac{1}{b}$ または $2+\frac{1}{b}\leqq 0$

b^2倍して整理

$b(b-1)\leqq 0$ または $b(2b+1)\leqq 0$

$0<b\leqq 1$ または $-\frac{1}{2}\leqq b<0$ $\quad (\because b\neq 0)$

(ii) $b=0$のとき.

①の不等式は成り立っている

(i)(ii)より $0\leqq x\leqq \frac{\pi}{2}$の全ての$x$について不等式が成り立つための条件は $-\frac{1}{2}\leqq b\leqq 1$

(2) $$|b^n a_n| = \left|b^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\cos x)^{n-1}}{(b+1-b\cos x)^n}dx\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{b}{b+1-b\cos x}\right)^n\sin x(\cos x)^{n-1}dx\right| \cdots (*)$$

ここで(1)より $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$のとき $\left|\frac{b}{b+1-b\cos x}\right|\leqq 1$ だから

$$(*) \leqq \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(\cos x)^{n-1}dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{n}\cos^n x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| = \left|0-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

$0\leqq |b^n a_n|\leqq\frac{1}{n}$ および $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より、はさみうちの原理より、$\lim_{n\to\infty}b^n a_n = 0$

(3) $$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{b+1-b\cos x}dx$$ $\quad b+1-b\cos x = t$とすると $\frac{dt}{dx} = b\sin x$, $\quad \begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 1 \to b+1 \end{array}$

$$a_1 = \int_1^{b+1}\frac{\cancel{\sin x}}{t}\times\frac{1}{b\cancel{\sin x}}dt = \left[\frac{1}{b}\log|t|\right]_1^{b+1} = \frac{1}{b}\log(b+1)$$ $\quad (\because -\frac{1}{2}\leqq b\leqq 1$のとき$b+1>0)$

(4) $$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\cos x)^{n-1}}{(b+1-b\cos x)^n}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)^{n-1}}{(b+1-b\cos x)^n}\cdot\sin x\,dx$$

$$= \left[-\cos x\frac{(\cos x)^{n-1}}{(b+1-b\cos x)^n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\frac{(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)(b+1-b\cos x)^{\cancel{n}} - (\cos x)^{n-1}\cdot n\cancel{(b+1-b\cos x)^{n-1}}\cdot b\sin x}{(b+1-b\cos x)^{\cancel{2n}\,n+1}}dx$$

$$= 1+(1-n)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\cos x)^{n-1}}{(b+1-b\cos x)^n}dx - bn\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\cos x)^n}{(b+1-b\cos x)^{n+1}}dx$$

$$= 1+(1-n)a_n - bn\,a_{n+1}$$

$$\therefore\ a_{n+1} = -\frac{1}{b}a_n + \frac{1}{bn}$$

(5) (4)より $a_{n+1} = \frac{1}{bn} - \frac{1}{b}a_n$

両辺 $(-b)^{n+1}$ 倍

$$(-b)^{n+1}a_{n+1} = -\frac{1}{n}(-b)^n + (-b)^n a_n$$

$$(-b)^{n+1}a_{n+1} = (-b)^1 a_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-b)^k}{k}$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{(-b)^k}{k} = (-b)^{n+1}a_n + ba_1$$

$b = \frac{1}{2}$ とすると $a_1 = 2\log\frac{3}{2}$ となるので

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot 2^k} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} a_n + \log\frac{3}{2}$$

(2)より $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} a_n = 0$ だから

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot 2^k} = \boldsymbol{\log\frac{3}{2}}$$

5 (1) $\left|\dfrac{\alpha z+1}{z+\alpha}\right| = 2 \iff |\alpha z+1| = 2|z+\alpha| \quad \cdots ①$

$\alpha=0$ のとき，$|z| = \dfrac{1}{2}$ となり z は原点中心、半径 $\dfrac{1}{2}$ の円

$\alpha \neq 0$ のとき ①は $\quad |\alpha|\left|z+\dfrac{1}{\alpha}\right| = 2|z+\alpha|$

と変形でき，**$|\alpha|=2$** のとき，点 $-\dfrac{1}{\alpha}$ と $-\alpha$ を結ぶ線分の垂直二等分線となり，

$|\alpha| \neq 2$ のとき，z は円を描く

$|\alpha| \neq 2$ のとき，

$|\alpha z+1| = 2|z+\alpha|$ を2乗して

$(\alpha z+1)(\bar{\alpha}\bar{z}+1) = 4(z+\alpha)(\bar{z}+\bar{\alpha})$

$|\alpha|^2|z|^2+\alpha z+\bar{\alpha}\bar{z}+1-4|z|^2-4\alpha\bar{z}-4\bar{\alpha}z-4|\alpha|^2=0$

$(|\alpha|^2-4)|z|^2+(\alpha-4\bar{\alpha})z+(\bar{\alpha}-4\alpha)\bar{z}-4|\alpha|^2+1=0 \quad \cdots ①$

$$\left(z+\frac{\bar{\alpha}-4\alpha}{|\alpha|^2-4}\right)\left(\bar{z}+\frac{\alpha-4\bar{\alpha}}{|\alpha|^2-4}\right) = \frac{4|\alpha|^2-1}{(|\alpha|^2-4)} + \frac{(\bar{\alpha}-4\alpha)(\alpha-4\bar{\alpha})}{(|\alpha|^2-4)^2}$$

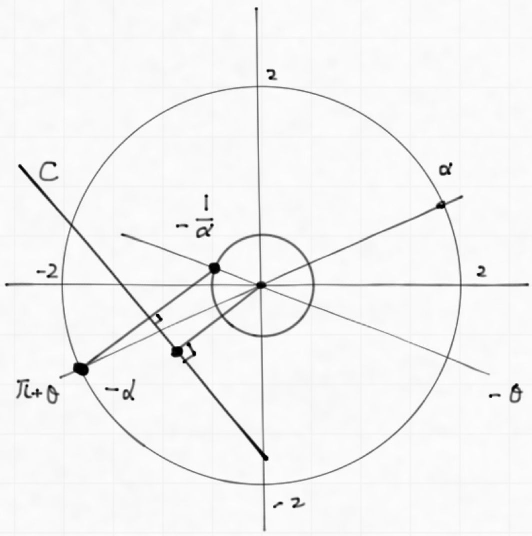
$$\left|z-\frac{4\alpha-\bar{\alpha}}{|\alpha|^2-4}\right| = \frac{2|\alpha^2-1|}{\left||\alpha|^2-4\right|}$$

中心は $\boldsymbol{\dfrac{4\alpha-\bar{\alpha}}{|\alpha|^2-4}}$ 半径は $\dfrac{2|\alpha^2-1|}{\left||\alpha|^2-4\right|}$ の円

$|\alpha|=2$ のとき，

原点を通って $-\alpha-\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)$ と平行な直線をDとすると

$z = k\left(-\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ と表せる（kは実数）



①より，Cは

$(\alpha-4\bar{\alpha})z+(\bar{\alpha}-4\alpha)\bar{z}-15=0$

ここに $z=k\left(-\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ を代入

$k(\alpha-4\bar{\alpha})\left(-\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)+k(\bar{\alpha}-4\alpha)\left(-\bar{\alpha}+\dfrac{1}{\bar{\alpha}}\right)-15=0$

$|\alpha|=2$ より $\quad \alpha\bar{\alpha}=4 \quad \bar{\alpha}=\dfrac{4}{\alpha}$ を代入

$k\left(\alpha-\dfrac{16}{\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)+k\left(\dfrac{4}{\alpha}-4\alpha\right)\left(\dfrac{\alpha}{4}-\dfrac{4}{\alpha}\right)=15$

$k\left(\alpha-\dfrac{16}{\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)\times 2=15$

$k = \dfrac{15}{2\left(\alpha-\frac{16}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)} \qquad z = \dfrac{15}{2\left(\alpha-\frac{16}{\alpha}\right)\cancel{\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)}}\cancel{\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)} = \dfrac{15}{2\left(\alpha-\frac{16}{\alpha}\right)} = \boldsymbol{\dfrac{15\alpha}{2(\alpha^2-16)}}$

5

(2) $f(a)+f(b)+f(c) = a+b+c-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

これが自然数となるには $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ が整数であることが必要となる.

$a \leqq b \leqq c$ だから $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a} = \frac{3}{a}$

aは自然数なので $\frac{3}{a} \leqq 3$. $\therefore$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ は 1, 2, 3 のいずれか.

(i) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$ のとき. $a=b=c=1$ $f(a)+f(b)+f(c)=0$ となり 条件を満たさない.

(ii) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ のとき.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{3}{a}$ より $a \leqq 6$.

① $a=1$ のとき $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow (b-1)(c-1)=1 \Leftrightarrow b=c=2$

$f(1)+f(2)+f(2) = 5-2 = 3$

② $a=2$ のとき $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow (3b-2)(3c-2)=4$

$\Leftrightarrow (3b-2,\ 3c-2) = (1,4), (2,2) \Leftrightarrow (b,c) = (1,2), \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

条件を満たす (a,b,c) は存在しない

③ $a=3$ のとき $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{5}{3} \Leftrightarrow (5b-3)(5c-3)=9 \Leftrightarrow (5b-3,\ 5c-3)=(1,9),(3,3)$

条件を満たす (a,b,c) は存在しない

④ $a=4$ のとき $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{7}{4} \Leftrightarrow (7b-4)(7c-4)=16 \Leftrightarrow (7b-4,\ 7c-4)=(1,16),(2,8),(4,4)$

条件を満たす (a,b,c) は存在しない

⑤ $a=5$ のとき $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{9}{5} \Leftrightarrow (9b-5)(9c-5)=25 \Leftrightarrow (9b-5,\ 9c-5)=(1,25),(5,5)$

条件を満たす (a,b,c) は存在しない

(iii) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ のとき.

(ii)と同様に考えて $a \leqq 3$

① $a=1$ のとき. $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ … 条件を満たす (a,b,c) は存在しない

② $a=2$ のとき $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow (b-2)(c-2)=4 \Leftrightarrow (b-2,\ c-2)=(1,4),(2,2)$

$(a,b,c)=(3,6),(4,4)$

このとき $f(2)+f(3)+f(6) = 11-1 = 10$

$f(2)+f(4)+f(4) = 10-1 = 9$

③ $a=3$ のとき $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow (2b-3)(2c-3)=9 \Leftrightarrow (2b-3,\ 2c-3)=(1,9),(3,3)$

$(b,c)=(2,6),(3,3)$ $(a,b,c)=(3,3,3)$ のみ条件を満たす.

$f(3)+f(3)+f(3) = 9-1 = 8$

(a,b,c) は $(1,2,2),(2,3,6),(2,4,4),(3,3,3)$ の **4** 個

$f(a)+f(b)+f(c)$ が最大となるのは $(a,b,c)=$ **(2, 3, 6)** のときで 値は **10**