慶応義塾大学2022 理工

1 (1)(i) $|\vec{a}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

$\vec{x}\cdot\vec{a}=(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})\cdot\vec{a}=p\times2^2+q\times0+r\times0=\mathbf{4p}$

$|\vec{x}|^2=|p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}|^2=p^2\times4+q^2+r^2=4p^2+q^2+r^2$ $\quad |\vec{x}|=\sqrt{4p^2+q^2+r^2}$

(ii) $(5,0,z)=\vec{y}$ と表す.

(i)でもとめた条件より $\quad \vec{y}\cdot\vec{a}=4s \iff 5\sqrt{3}+z=4s$ …①

$|\vec{y}|^2=4s^2+\cos^2\theta+\sin^2\theta \iff 25+z^2=4s^2+1$ …②

①より $z=4s-5\sqrt{3}$ を②に代入. $\quad 25+16s^2-40\sqrt{3}s+75=4s^2+1$

$12s^2-40\sqrt{3}s+99=0$

$$s=\frac{20\sqrt{3}\pm\sqrt{1200-12\times99}}{12}=\frac{20\sqrt{3}\pm2\sqrt{3}}{12}=\frac{11}{6}\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$z=\frac{7}{3}\sqrt{3},\ \sqrt{3}$$

(2)① $n=6k+1$ のとき $\quad n\left[\frac{3n+2}{2}\right]=(6k+1)\times\left[\frac{18k+5}{2}\right]=(6k+1)(9k+2)$

$(6k+1)(9k+2)\equiv3k+2 \pmod 6$

$3k+2\equiv2$ または $3k+2\equiv5 \pmod 6$ だから. $n\left[\frac{3n+2}{2}\right]$は 6の倍数ではない.

② $n=6k+3$ のとき $\quad n\left[\frac{3n+2}{2}\right]=(6k+3)\times\left[\frac{18k+11}{2}\right]=(6k+3)(9k+5)$

$(6k+3)(9k+5)\equiv3\times(3k+5)\equiv3k+3 \pmod 6$

これはkが奇数のとき 6の倍数となる.

③ $n=6k+5$ のとき $\quad n\left[\frac{3n+2}{2}\right]=(6k+5)\times\left[\frac{18k+17}{2}\right]=(6k+5)\times(9k+8)$

$(6k+5)\times(9k+8)\equiv5\times(3k+2)\equiv3k+4 \pmod 6$

$3k+4\equiv4$ または $3k+4\equiv2 \pmod 6$ だから. $n\left[\frac{3n+2}{2}\right]$は 6の倍数ではない

以上 ①～③ より

nを**12**で割った余りが **9**のとき. nと$\left[\frac{3n-2}{2}\right]$の積は 6の倍数となる.

2

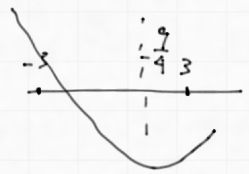
(1) C_2の式より $y^2=1-\frac{x^2}{9}\geqq 0 \iff -3\leqq x\leqq 3$

$(x-2)^2+y^2=r^2$ より $y^2=r^2-(x-2)^2$ を C_2の式に代入

$$\frac{x^2}{9}+r^2-(x-2)^2=1 \iff 8x^2-36x+45-9r^2=0$$

この方程式が $-3\leqq x\leqq 3$ の範囲に実数解を持てば共有点が存在する

$f(x)=8x^2-36x+45-9r^2$ として



$f(x)=8\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{9}{2}-9r^2$ だから軸は $-3\leqq x\leqq 3$ の範囲にあるので

$f(x)=0$ の判別式Dが $D\geqq 0$ を満たし、端点 $f(-3)\geqq 0$ となればよい。

$$\frac{D}{4}=18^2-8(45-9r^2)=-36+72r^2\geqq 0 \iff r\geqq\frac{1}{\sqrt2} \quad (\because r>0)$$

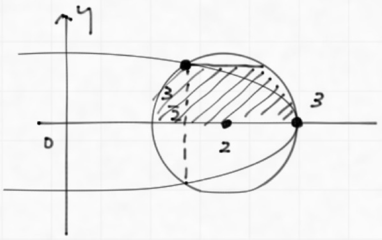
$$f(-3)=72+108+45-9r^2=225-9r^2\geqq 0 \iff 0<r\leqq 5 \quad (\because r>0)$$

以上をあわせて $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt2}\leqq r\leqq 5}$ のとき C_1 と C_2 は共有点をもつ

(2) $f(x)=0$ の式に $r=1$ を代入 $8x^2-36x+36=0 \iff (2x-3)(x-3)=0 \quad \therefore x=\frac{3}{2}, 3$

$x=\frac{3}{2}$のとき $y^2=1-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^2$ より $y=\pm\frac{\sqrt3}{2}$

$x=3$ のとき $y^2=1-\frac{1}{9}\times 3^2=0$ より $y=0$ y座標が正となる共有点は $\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt3}{2}\right)$ $y_0=\boldsymbol{\frac{\sqrt3}{2}}$



$$(x-2)^2+y^2=1 \iff x=2\pm\sqrt{1-y^2}$$

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\left\{\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)-\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)\right\}dy$$

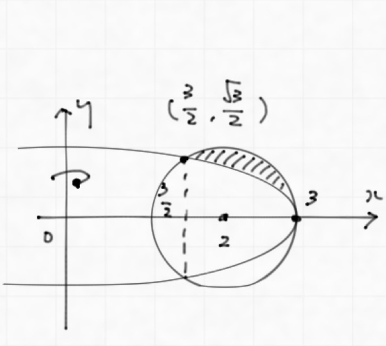
$$=\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}} 2\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$y=\sin\theta$ とおくと $\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta$

y	$0\to\frac{\sqrt3}{2}$
θ	$0\to\frac{\pi}{3}$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}-0=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt3}{4}}$$



(3)

$$\frac{x^2}{9}+y^2=1 \iff x=\pm 3\sqrt{1-y^2}$$

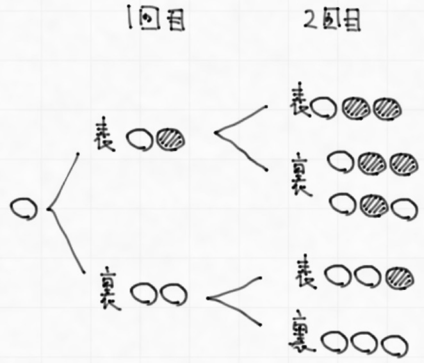
$$V=\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\left\{\pi\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2-\pi\left(3\sqrt{1-y^2}\right)^2\right\}dy+\int_{\frac{\sqrt3}{2}}^{1}\left\{\pi\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2-\pi\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right\}dy$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\left(8y^2+4\sqrt{1-y^2}-4\right)dy+\pi\int_{\frac{\sqrt3}{2}}^{1}8\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{8}{3}y^3-4y\right]_0^{\frac{\sqrt3}{2}}+2\pi\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}2\sqrt{1-y^2}\,dy+4\pi\int_{\frac{\sqrt3}{2}}^{1}2\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$=-\sqrt3\pi+\frac{2}{3}\pi^2+\frac{\sqrt3}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi^2-\sqrt3\pi=\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi^2-\frac{3}{2}\sqrt3\pi}$$

3



(1) 表・裏とでて、白玉がえらばれる　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

裏表とでる　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

あわせて　$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

(2) 表2回裏1回とでるのは　$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)\times{}_3C_1=\frac{3}{8}$

白2個となるのは

表表裏○　　表裏○表　　裏○表表

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{11}{48}$$

条件つき確率は　$\frac{11}{48}\div\frac{3}{8}=\mathbf{\frac{11}{18}}$

(3) 裏が出続ける　$\left(\frac{1}{2}\right)^k$

(4) 白玉が増えるのは裏が出て白玉がえらばれたときのみだから

表　裏　裏　裏　裏

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}\right)\frac{k-1}{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{k-1}{k}=\frac{1}{k\cdot2^k}$$

条件つき確率は　$\frac{1}{k\cdot2^k}\div\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{k\cdot2^{k-1}}}$

(5) l回目$(1\leqq l\leqq k)$に表が出て、他は全て裏で白玉

1回目　2回目　l回目　$l+1$回目　$l+2$回目　k回目

裏○　裏○　表　裏○　裏○

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}\right)\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{l}{l+1}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{l+1}{l+2}\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{k-1}{k}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\frac{l}{k}$$

$$\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\frac{l}{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{\cancel{k}}\times\frac{1}{2}\cancel{k}(k+1)=\mathbf{\frac{k+1}{2^{k+1}}}$$

4

(1) $e^x = ax+b \iff e^x - ax - b = 0$.

左辺を $f(x)$ と表す.

C と $y=ax+b$ が共有点を持つ条件は $f(x)=0$ が解を持つことと同値で、それは、$y=f(x)$ のグラフが x 軸と交わることと等しい.

$$f'(x) = e^x - a$$

である

(i) $a>0$ のとき

$f'(x)=0$ となるのは $x=\log a$ のときのみで、$f(x)$ の増減は右のようになる.

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

だから、$y=f(x)$ が x 軸と交わるのは 極小値 $f(\log a) = a - a\log a - b$ が 0 以下となるときである.

よって、もとめる条件は

$$a - a\log a - b \leqq 0 \iff b \geqq a(1-\log a)$$

となる.

(ii) $a=0$ のとき.

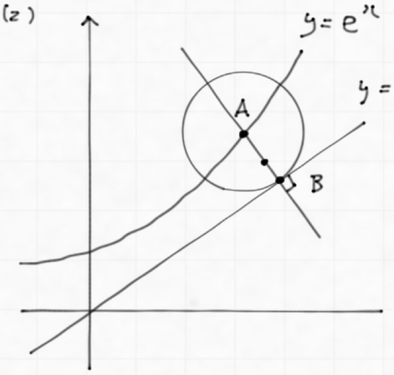
$f'(x) = e^x > 0$ だから $f(x)$ は単調に増加する.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -b$$

なので $-b<0$ すなわち $b>0$ のとき $y=f(x)$ は x 軸と共有点をもつ

(i)(ii) より　**$a>0$ のとき　$b \geqq a(1-\log a)$**　　**$a=0$ のとき　$b>0$**

(2)



(t, e^t) を通って傾き -1 の直線を考える.

$$y = -x + t + e^t$$

これと $y=x$ の交点は　$x = \dfrac{t+e^t}{2}$

(t, e^t) と $y=x$ との距離が半径となっている.

$$\frac{|t-e^t|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t - t)$$

P は AB を $3:2$ に内分するので

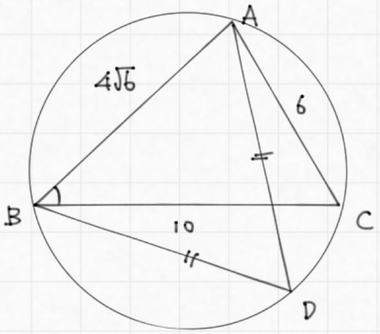
$$X(t) = \frac{3}{5}\times\frac{t+e^t}{2} + \frac{2}{5}t = \frac{7}{10}t + \frac{3}{10}e^t \quad , \quad Y(t) = \frac{3}{5}\frac{t+e^t}{2} + e^t = \frac{3}{10}t + \frac{13}{10}e^t$$

よって

$$\frac{Y(t) - kX(t)}{\sqrt{X(t)^2+Y(t)^2}} = \frac{(7-3k)e^t + (3-7k)t}{\sqrt{(3e^t+7t)^2+(7e^t+3t)^2}} = \frac{7-3k + (3-7k)\frac{t}{e^t}}{\sqrt{(3+7\frac{t}{e^t})^2+(7+\frac{t}{e^t})^2}} \to \frac{7-3k}{\sqrt{3^2+7^2}}$$

これが 0 となるのは $7-3k=0$ すなわち $k=\dfrac{7}{3}$ のときである.

5



(1) $\cos\angle ABC = \dfrac{100+(4\sqrt{6})^2-36}{2\cdot 10\cdot 4\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

Tは 三角形ABCの外接円に相当する.

Tの半径をRとする $\sin\angle ABC = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ だから

正弦定理より. $R = \dfrac{AC}{2\sin\angle ABC} = \dfrac{6}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \boldsymbol{3\sqrt{3}}$

DがAD=BDの二等辺三角形となるときに最大.(Dは優弧AB上)

正弦定理より $\sin\angle ACB = \dfrac{AB}{2R} = 4\sqrt{6}\times\dfrac{1}{6\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

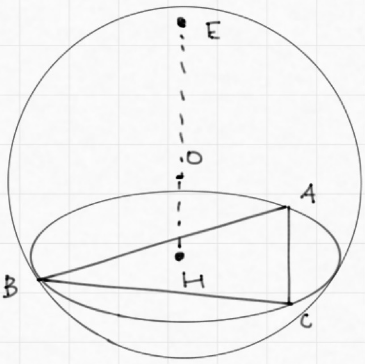
$\cos\angle ACB = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{1}{3}$

$AD=BD=x$ として. 余弦定理

$(4\sqrt{6})^2 = x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3}x^2$

$x = 6\sqrt{2}$

このとき $\triangle ABD = \frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times 6\sqrt{2}\times\frac{2}{3}\sqrt{2} = \boldsymbol{24\sqrt{2}}$



(2) $\triangle ABC$の外心をHとする

$OH = \sqrt{OA^2-AH^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2-(3\sqrt{3})^2} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$

(3) EがO. Hの真上にあるとき最大となる

体積をVとして

$V = \triangle ABC\times(OH+OE)\times\frac{1}{3}$

$= \frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{4}^{2}\cancel{\sqrt{6}}^{\sqrt{2}}\times 10\times\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}\times(\sqrt{5}+4\sqrt{2})\times\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{20}{3}(\sqrt{10}+8)}$