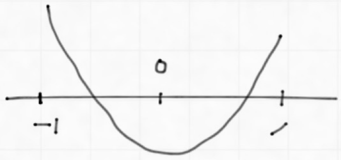
東京大学2021

1

(1) 2式を連立 $x^2+ax+b=-x^2 \Leftrightarrow 2x^2+ax+b=0$

$f(x)=2x^2+ax+b$ とおく

2つのグラフが題意の条件を満たすのは $f(x)$のグラフが $-1<x<0$ および $0<x<1$ で x軸と交わるときで



そのための条件は

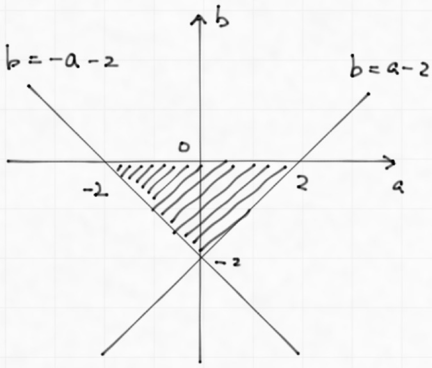
$f(-1)=2-a+b>0 \Leftrightarrow b>a-2$

$f(0)=b<0$

$f(1)=2+a+b>0 \Leftrightarrow b>-a-2$

が同時になり立つときである

(a,b)のとりうる範囲は右図斜線部



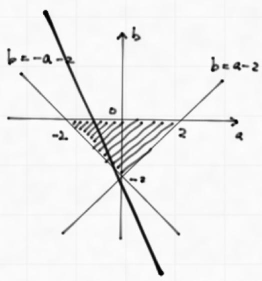
(2) Cのとおる範囲内の点を(X,Y)とすると、この点を通る~~放物線~~Cが存在するので $Y=X^2+aX+b$ …①

(X,Y)が領域内の点であるための条件は①を満たす実数a,bが存在することで

①をa,bについて整理した $b=-Xa+Y-X^2$ の直線と(1)の(a,b)の領域が共有点を持てばよい

ここで $g(a)=-Xa+Y-X^2$ とおくと

(i) $-X<-1$ のとき ($X>1$のとき)

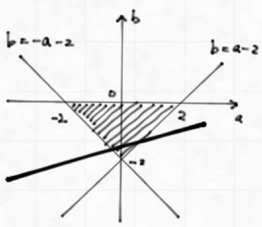


$g(-2)=2X+Y-X^2>0$

かつ $g(2)=-2X+Y-X^2<0$

$Y>X^2-2X$ かつ $Y<X^2+2X$

(ii) $-1\leqq -X\leqq 1$ のとき ($-1\leqq X\leqq 1$のとき)

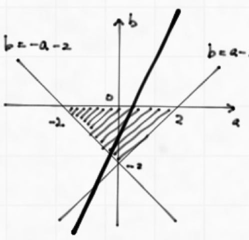


$g(0)=Y-X^2>-2$

$g(2)$, $g(-2)$のいずれかは負

$Y<X^2-2X$ または $Y<X^2+2X$

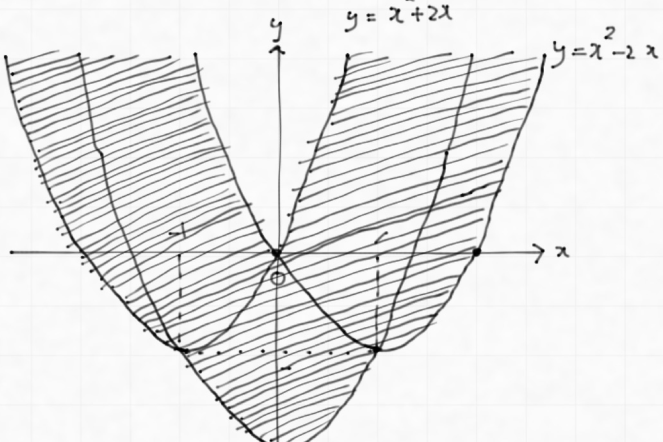
(iii) $-X>1$ のとき ($X<-1$のとき)



$g(-2)=2X+Y-X^2<0$

かつ $g(2)=-2X+Y-X^2>0$

$Y<X^2-2X$ かつ $Y>X^2+2X$



以上をまとめて

$x>1$のとき $x^2-2x<y$, $y<x^2+2x$

$x<-1$のとき $x^2+2x<y$, $y<x^2-2x$

$-1\leqq x\leqq 0$のとき $y<x^2-2x$, $y>x^2-2$

$0<x\leqq 1$のとき $y<x^2+2x$, $y>x^2-2$

左グラフ斜線部(境界除く)

2

(1) $f(0)=c=\alpha$

$f(1)=a+b+c=\beta$ 　 $c=\alpha$だから 　 $a+b=\beta-\alpha$ 　 …①

$f(i)=-a+bi+c=\gamma$ 　 $c=\alpha$だから 　 $-a+bi=\gamma-\alpha$ 　 …②

①+② 　 $(1+i)b=\beta+\gamma-2\alpha$ 　 $b=\dfrac{\beta+\gamma-2\alpha}{1+i}$

$a=\beta-\alpha-b=\beta-\alpha-\dfrac{(\beta+\gamma-2\alpha)(1-i)}{2}=\dfrac{\beta-\gamma+\beta i+\gamma i-2\alpha i}{2}$

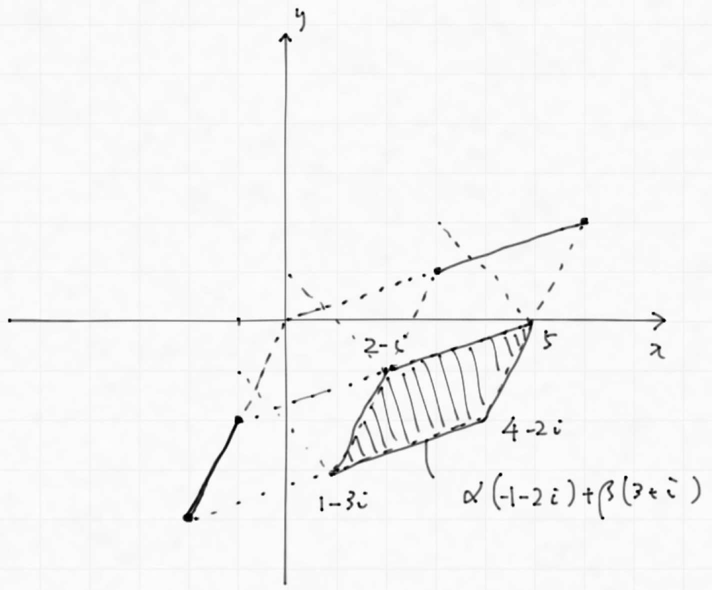
(2) $f(2)=4a+2b+c$

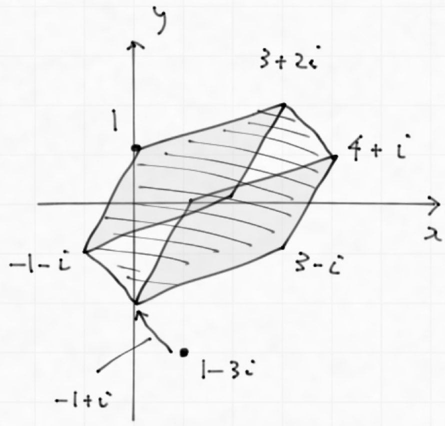
$=\cancel{4}^{2}\dfrac{\beta-\gamma+\beta i+\gamma i-2\alpha i}{\cancel{2}}+\cancel{2}\times\dfrac{(\beta+\gamma-2\alpha)(1-i)}{\cancel{2}}+\alpha$

$=2\beta-2\gamma+2\beta i+2\gamma i-4\alpha i+\beta-\beta i+\gamma-\gamma i-2\alpha+2\alpha i+\alpha$

$=3\beta-\gamma-\alpha+\gamma i-2\alpha i+\beta i$

$=\alpha(-1-2i)+\beta(3+i)+\gamma(-1+i)$





まず、$\alpha(-1-2i)+\beta(3+i)$を考える

$1\leqq\alpha\leqq2$, $1\leqq\beta\leqq2$ だから上図斜線部

ここに $\gamma(-1+i)$ 　 $1\leqq\gamma\leqq2$を

加えて平行移動し、上図斜線部

境界含む

3

(1) $f'(x) = \dfrac{x^2+3-x\times 2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$

$f'(1) = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$, $f(1) = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$

l は $y = \dfrac{1}{8}(x-1)+\dfrac{1}{4} \iff y = \dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{8}$

l と C を連立 $\dfrac{x}{x^2+3} = \dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{8} \iff 8x = (x+1)(x^2+3)$

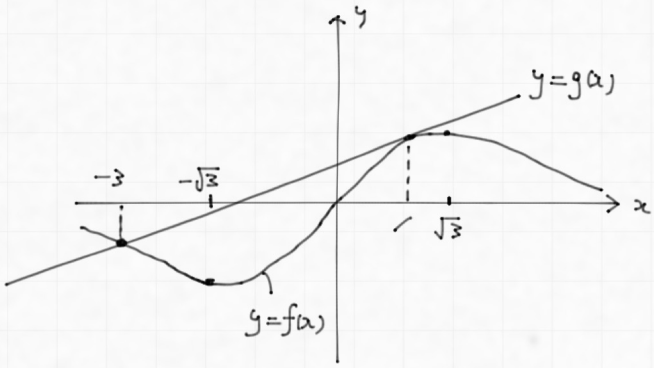
$\iff x^3+x^2-5x+3=0 \iff (x-1)^2(x+3)=0$

l と C の共有点で A と異なるものは ただ1つ存在し、その x 座標は **-3**

(2) $f(-x) = -f(x)$ だから $f(x)$ は奇関数.

$f(x)$ の増減は下のようになり.

グラフは右のようになる



x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. $f(0)=0$. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$$\int_\alpha^1 \{f(x)-g(x)\}^2 dx = \int_{-3}^1 \left(\frac{x}{x^2+3} - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\right)^2 dx = \int_{-3}^1 \left(\frac{x^2}{(x^2+3)^2} - \frac{1}{4}(x+1)\frac{x}{x^2+3} + \frac{1}{64}(x+1)^2\right) dx$$

$\cdots$ ①

$\displaystyle\int_{-3}^1 \frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx$ $x = \sqrt{3}\tan\theta$ とおく $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$,

x	$-3 \to 1$
θ	$-\frac{\pi}{3} \to \frac{\pi}{6}$

$$\int_{-3}^1 \frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\tan^2\theta}{(3\tan^2\theta+3)^2} \times \frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^2\theta}{\frac{3}{\cos^2\theta}} \times \sqrt{3}\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{3}}{6}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}\int_{-3}^1 \frac{x^2+x}{x^2+3}dx = \frac{1}{4}\int_{-3}^1 \left(1 + \frac{x}{x^2+3} - \frac{3}{x^2+3}\right)dx$$

$\displaystyle\int_{-3}^1 \frac{3}{x^2+3}dx$ は $x = \sqrt{3}\tan\theta$ として $\displaystyle\int_{-3}^1 \frac{3}{x^2+3}dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3}\, d\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

$$\int_{-3}^1 \frac{x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\Big[\log(x^2+3)\Big]_{-3}^1 = \frac{1}{2}\log 4 - \frac{1}{2}\log 12 = \frac{1}{2}\log\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\log 3$$

$$① = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi - \frac{1}{2}\log 3 + 4\right) + \left[\frac{(x+1)^3}{64\cdot 3}\right]_{-3}^1 = \mathbf{\frac{5\sqrt{3}}{24}\pi + \frac{1}{8}\log 3 - \frac{7}{6}}$$

4

(1) (i) $K \equiv L \equiv 1 \pmod 4$ のとき.

$KA = LB$ より　$1 \cdot A \equiv 1 \cdot B \pmod 4$

(ii) $K \equiv L \equiv 3 \pmod 4$ のとき

$KA = LB$ より　$3A \equiv 3B \pmod 4$

$3(A-B) \equiv 0 \pmod 4$

ここで $3 \not\equiv 0 \pmod 4$ だから　$A - B \equiv 0 \pmod 4$

よって正の奇数 K, L を4で割った余りが等しいとき, A と B を4で割った余りも等しい.

(2) $$A = {}_{4a+1}C_{4b+1} = \frac{(4a+1)!}{(4b+1)!(4a-4b)!} = \frac{4a+1}{4b+1} \times \frac{4a}{4b} \times \frac{4a-1}{4b-1} \times \cdots \times \frac{4a-4b+1}{1} \quad \cdots ①$$

$$B = {}_aC_b = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \times \frac{a-1}{b-1} \times \frac{a-2}{b-2} \times \cdots \times \frac{a-b+1}{1} \quad \cdots ②$$

①② を $KA = LB$ に代入

$$\frac{4a+1}{4b+1} \times \cancel{\frac{4a}{4b}} \times \frac{4a-1}{4b-1} \times \overset{2a-1}{\underset{2b-1}{\cancel{\frac{4a-2}{4b-2}}}} \cdots \times \cancel{\frac{4a-4}{4b-4}} \times \cdots \times \cancel{\frac{4a-4b+4}{4}} \times \cdots \times \frac{4a-4b+1}{1} K = \cancel{\frac{a}{b}} \times \cancel{\frac{a-1}{b-1}} \times \cdots \times \cancel{\frac{a-b+1}{1}} \times L$$

$$\frac{4a+1}{4b+1} \times \frac{4a-1}{4b-1} \times \frac{2a-1}{2b-1} \times \frac{4a-3}{4b-3} \times \frac{4a-5}{4b-5} \times \frac{2a-3}{2b-3} \times \frac{4a-7}{4b-7} \times \cdots \times \frac{4a-4b+3}{3} \times (2a-2b+1) \times (4a-4b+1) K = L$$

$$\underline{(4a+1)(4a-1)(2a-1)(4a-3)(4a-5)(2a-3)(4a-7) \times \cdots \times (4a-4b+1)} K = \underline{(4b+1)(4b-1) \cdots 3} L \quad \cdots ③$$

—— と 〜〜 部はいずれも奇数の積だから奇数.

よって $K =$ (〜〜 部), $L =$ (—— 部) とすれば ③ は成り立つので ③ を満たす奇数 K, L は存在する.

(3) ${}_{4a+1}C_{4b+1} - {}_aC_b$

$$= \left\{ \underbrace{\frac{4a+1}{4b+1} \times \frac{4a-1}{4b-1} \times \frac{2a-1}{2b-1} \times \frac{4a-3}{4b-3} \times \frac{4a-5}{4b-5} \times \frac{2a-3}{2b-3} \times \frac{4a-7}{4b-7} \times \cdots \times \frac{4a-4b+3}{3} \times \frac{(2a-2b+1)}{1} \times \frac{(4a-4b+1)}{1}} - 1 \right\} {}_aC_b \quad \cdots ④$$

ここで〜〜部の分数式は整数であるが,

$\frac{4a+1}{4b+1}$, $\frac{4a-1}{4b-1}$, $\frac{2a-1}{2b-1}$, $\cdots$ の分母と分子のそれぞれの数を4で割った余りは等しい

$\left(\because\ 4a+1 \equiv 4b+1 \equiv 1,\ 4a-1 \equiv 4b-1 \equiv 3 \ \cdots \pmod 4 \right.$

$\left. (2a-1) - (2b-1) = 2(a-b) \equiv 0 \pmod 4 \text{ など} \right)$

よって〜〜部は $\frac{4y+1}{4x+1}$ または $\frac{4y+3}{4x+3}$ のような形でかつ, 整数.

$\frac{4y+1}{4x+1}$ のとき, $\frac{4y+1}{4x+1} = k$ (k は整数) とすると $4y+1 = 4kx + k$

4で割った余りを考えると　$1 \equiv k \pmod 4$ となり, このとき ④ 式は4で割り切れ,

${}_{4a+1}C_{4b+1} \equiv {}_aC_b \pmod 4$ が成り立つ

$\frac{4y+3}{4x+3}$ のとき　$\frac{4y+3}{4x+3} = k$ (k は整数) として　$4k+3 = k(4x+3)$ より

$3 \equiv 3k \pmod 4$

$\Leftrightarrow \quad 3(k-1) \equiv 0 \pmod 4$

よって $k \equiv 1 \pmod 4$ であり. ④は4で割り切れる.

以上より. $a-b$ が2で割り切れるとき. ${}_{4a+1}C_{4b+1} \equiv {}_aC_b \pmod 4$ が成り立つ.

(4) $2021 \equiv 1,\ 37 \equiv 1 \pmod 4$ だから.

$${}_{2021}C_{37} = {}_{(4\times505+1)}C_{4\times9+1} \equiv {}_{505}C_9 = {}_{(4\times126+1)}C_{4\times2+1} \equiv {}_{126}C_2 = \frac{126\times125}{2} = 63\times125 \pmod 4$$

$63\times125 \equiv 3\times1 \equiv 3 \pmod 4$

$\therefore\ {}_{2021}C_{37} \equiv 3 \pmod 4$

5 (1) $f(\theta) = (\theta + \sin\theta + \alpha)^2 + (\cos\theta + 3)^2$

$$f'(\theta) = 2(\theta + \sin\theta + \alpha)(1 + \cos\theta) + 2(\cos\theta + 3)(-\sin\theta)$$
$$= 2(\theta\cos\theta + \alpha\cos\theta - 2\sin\theta + \theta + \alpha)$$

$f'(\theta) = 0$ を整理する

$$\alpha(1 + \cos\theta) = 2\sin\theta - \theta\cos\theta - \theta$$

$0 < \theta < \pi$ だから $1 + \cos\theta \neq 0$

$$\alpha = \frac{2\sin\theta}{1 + \cos\theta} - \theta = \frac{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} - \theta = 2\tan\frac{\theta}{2} - \theta$$

$g(\theta) = 2\tan\frac{\theta}{2} - \theta$ とおく

$$g'(\theta) = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} - 1 = \tan^2\frac{\theta}{2} > 0 \quad , \quad g(0) = 0, \quad \lim_{\theta \to \pi} g(\theta) = \infty$$

よって $g(\theta)$ は $0 < \theta < \pi$ の範囲で単調に増加し、$g(\theta) > 0$

であり $g(\theta) = \alpha$ となる θ は必ず1つ、存在する。

(2) $f'(0) = 2(0 + \alpha - 0 + 0 + \alpha) > 0$ だから $g(\theta) = \alpha$ を満たす θ を θ_0 として

$f(\theta)$ の増減は次のようになる。

	0	$\cdots$	θ_0	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	θ_0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

この θ_0 が $\frac{\pi}{2}$ よりも小さいときに条件を満たすので、

$$0 < \alpha < 2\tan\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

$0 < \alpha < 2 - \frac{\pi}{2}$ のとき、題意は成り立つ。

6

(1) $(x^2+px+q)(x^2-px+r) = x^4+(q+r-p^2)x^2+(pr-pq)x+qr$

これが x^4+bx+c と等しいので $q+r=p^2$, $p(r-q)=b$, $qr=c$

$q+r=p^2$, $r-q=\frac{b}{p}$ を辺々加えて $\boldsymbol{r=\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)}$, $\boldsymbol{q=\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right)}$

(2) $c=qr$ に値を代入

$$-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1) = \frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right)\times\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)$$

$$-4\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1) = p^4-\frac{1}{p^2}(a^2+1)^2(a+2)^2$$

$$p^6+4\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2=0$$

ここで $p^2=X$ とすると 上式は $X^3+4\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)X-(a^2+1)^2(a+2)^2=0$

左辺を $h(X)$ として $h(a^2+1)$ をもとめると

$$h(a^2+1) = (a^2+1)^3+4\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)^2-(a^2+1)^2(a+2)^2$$

$$=(a^2+1)^2(\cancel{a^2}+1+\cancel{4a}+3-\cancel{a^2}-\cancel{4a}-4)=0$$

よって $h(x)$ は $X-a^2-1$ を因数にもち、

$$h(X)=(X-a^2-1)(X^2+(a^2+1)X+(a^2+1)(a+2)^2)=0$$

$X=p^2$ として $(p^2-a^2-1)(p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2)=0$

となるので $f(t)=t^2+1$, $g(t)=(t^2+1)(t+2)^2$ とすれば条件を満たす.

(3) 4次式は与式で $b=(a^2+1)(a+2)$, $c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$ としたもので (1)より 有理数 p が存在すれば、有理数 q, r は存在し、有理数 p は $\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}=0$ …① を満たす

すなわち ① を満たす有理数 p が存在するとき、与えられた x の4次式は有理数係数の2次式の積に因数分解できる.

① が成り立つのは (i) $p^2=a^2+1$ (ii) $p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2=0$ のいずれかが成り立つときで.

(i) のとき. $p=\pm\sqrt{a^2+1}$ で、これが有理数となるのは a^2+1 が平方数のときで.

整数 n を用いて $a^2+1=n^2 \iff (n+a)(n-a)=1 \iff (n+a,\ n-a)=(1,1),(-1,-1)$

$\iff (a,\ n)=(0,1),(0,-1)$ $a=0$

(ii) のとき.

$p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2=0$ について. $p^4\geq 0$, $a^2+1\geq 1$, $(a+2)^2>4$ だから

この4次式を満たす実数 p は存在しない

以上より. ① を満たす有理数 p が存在するのは **$a=0$** のときのみで このとき. 4次式は2次の有理数係数の2次式の積で表すことができる